1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2-a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b) Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b) Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=8$.

b) Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-4$.

b) Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+(a+1)y+az=3 \\ ax+6y+4z=a+3 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

b) Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

c) Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=i$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=-15$.

b) Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

c) Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=0$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m,m^2)$ și $C(m+1,(m+1)^2)$,

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det A=1$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

c) Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A(a)\right)=1$, pentru orice număr real a.

b) Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

a) Arătaţi că $\det A=0$.

b) Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

c) Daţi exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

a) Arătați că $\det\left(A(m)\right)=m-9$, pentru orice număr real m.

b) Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

c) Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=2$.

b) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(A(1))=-3$.

b) Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

c) Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -a & 0\end{pmatrix}$ și $(A(a))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -a\\ 3 & a & 0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=1$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

c) Se consideră matricea $B(a)=A(a)-(A(a))^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=5$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

c) Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

a) Arătați că $\det(A(1))=7$.

b) Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

c) Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (2a+1)x+y-2z=a \\ (a-1)x-y+z=a+1 \\ 2ax-2y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

c) Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.