Exerciţii rezolvate cu matrice şi determinanţi

Enunţuri

Ex.1.

Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=2$, $b=1$ şi $c=-1$, să se calculeze determinantul d.

b) Să se verifice că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=0$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-2x=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Să se calculeze determinantul d.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

b) Să se verifice dacă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1)+X(2)+X(3)+...+X(2009)$.

Variante M2 bac 2009

Ex.5.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine x real, ştiind că $\det(A)=0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

Variante M2 bac 2009

Ex.6.

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2=B\cdot B$.

b) Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

Variante M2 bac 2009

Rezolvări

Ex.1.

a)Utilizând relaţiile lui Viete obţinem $x_1+x_2+x_3=0$.

b) x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$ deci avem:

$$x_1{}^3-3x_1+2=0$$
$$x_2{}^3-3x_2+2=0$$
$$x_3{}^3-3x_3+2=0$$

....

$$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3-3(x_1+x_2+x_3)+6=0$$
$$\Rightarrow x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3=-6$$

c) $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=3x_1x_2x_3-(x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3)$

A treia relaţie a lui Viete ne dă $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-2$ deci $d=-6-(-6)=0$

Ex.2.

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=8-1+1+2+2+2=14.$$

b)Adunăm ultimele două linii la prima şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\right)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right).$$

c)Folosind punctul b) rezultă:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(2^x+3^x+5^x\right)\left(\left(2^x-3^x\right)^2+\left(3^x-5^x\right)^2+\left(5^x-2^x\right)^2\right)=0$$

Cum $2^x+3^x+5^x>0$ rezultă că singura posibilitate este $2^x=3^x=5^x\Rightarrow x=0$.

Ex.3.

a)Scriem relaţiile lui Viete:

$a=1, b=0, c=-2, d=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=0 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=\dfrac{c}{a}=-2 \\ x_1\cdot x_2\cdot x=-\dfrac{d}{a}=0 \end{cases}$$

Reţinem $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=0$.

b) $(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)$

Folosim relaţiile lui Viete şi obţinem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$.

c) $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$

x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-2x=0$ deci avem:

$x_1^3-2x_1=0$

$x_2^3-2x_2=0$

$x_3^3-2x_3=0$

....

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-2(x_1+x_2+x_3)=0$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$

Mai departe obţinem d=0.

Ex.4.

a) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=A$

$A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A$.

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2^2+bI_2A+aAI_2+abA^2=I_2+bA+aA+abA=$

$=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$.

c) $X(1)+X(2)+X(3)+...+X(2009)=I_2+A+I_2+2A+I_2+3A+...+I_2+2009A=$

$=2009I_2+(1+2+3+...+2009)A=2009I_2+\dfrac{2009\cdot 2010}{2}A=2009I_2+1005\cdot 2009A$.

Ex.5.

a) $\det(A)=\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix}=(x-3)^2-1=x^2-6x+8=0$

Se obţin soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=4$.

b) $A^2=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x-3)^2+1 & 2x-6 \\ 2x-6 & (x-3)^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}$

$(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2=(2x-6)\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}-(x^2-6x+8)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2x^2-12x+18 & 2x-6 \\ 2x-6 & 2x^2-12x+18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x^2-6x+8 & 0 \\ 0 & x^2-6x+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}$

De aici rezultă că $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$

c) $A^2=2A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-6 & 2 \\ 2 & 2x-6 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x^2-6x+10=2x-6 \\ 2x-6=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-8x+16=0 \\ 2x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2=0 \\ x=4 \end{cases}$ de unde rezultă că x=4.

Ex.6.

a) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

b) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ rezultă că A^{-1} este inverse matricei A.

c) $C = B^2 + A^{-1} = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$

$C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C = 6I_2 \cdot 6I_2 \cdot 6I_2 \cdot 6I_2 = 6^4 \cdot I_2$.