Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+x^2+2=2\cdot 3x$	**3p**
	$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.	$\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x} \Leftrightarrow -4x+9=5x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$	**1p**
5.	Punctul $M(1,2)$ este mijlocul laturii BC	**1p**
	$m_{AM}=\frac{2-0}{1-(-1)}=1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AM este $y=x-1$	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2^{10}=1024$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$	**2p**
	$A(3x)=A\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=2$	**3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, obținem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$	**3p**
	$n=2017\cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$ $=0-0+a=a$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$ $-3a=2016-4a \Leftrightarrow a=2016$	**3p** **2p**
c)	Presupunem că f are cel puţin două rădăcini întregi x_1 şi x_2; cum $x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3\in\mathbb{Z}$ Ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2\geq x_2^2\geq x_3^2$, obţinem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ şi $x_3^2=0$ Deoarece pentru valorile pe care le obţinem pentru x_1, x_2 şi x_3, relaţia $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$ $=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obţinem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ şi cum $f'(0)=0$, obţinem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ $0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n şi $x\in[0,1]$ avem $-x^2\leq 0$ şi $\left(1-x^2\right)^n\geq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int\limits_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=\left.x\left(1-x^2\right)^{n+1}\right\|_0^1-\int\limits_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=$ $=2(n+1)\int\limits_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\int\limits_0^1\left(1-x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**