Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3(7-4)=$	**3p**
	$=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**2p**
	Coordonatele sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-5$	**3p**
3.	$(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$NP=2$	**2p**
	Punctul P aparține segmentului MN, deci $MP=MN-NP=1$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$	**3p**
	$\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x+(-\sin x)+(-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2,3))=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**
2.a)	$f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$	**3p**
	$=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

b)	Pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, $f(-1) = n \cdot (-1)^n + (-1)^2 - n \cdot (-1) - 1 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu $X+1$	**2p**
	$f(1) = 0 \Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul f este divizibil cu X^2-1	**3p**
c)	Dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha = \frac{1}{d}$, unde $d \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	**1p**
	$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \Rightarrow d^{n-2}\left(d^2 + nd - 1\right) = n \Rightarrow d^{n-2} / n$, deci $\lvert d \rvert^{n-2} \leq n$	**2p**
	Cum $\lvert d \rvert^{n-2} \geq 2^{n-2} > n$ pentru orice număr natural n, $n \geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' - (x)' = \frac{1}{x^2+1} - 1 =$	**2p**
	$= \frac{1 - x^2 - 1}{x^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = -1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - x + x \right) = \frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y = -x + \frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f(x) + g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x) + g(x) \right)' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0) + g(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x) = -2x e^{-x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0, +\infty)$	**3p**
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq 0$, deci $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$0 \leq I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x^2} dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1 dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent	**1p**