

**Examenul de bacalaureat național 2019**

**Proba E. c)  
Matematică M\_șt-nat**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{(1+i) - (1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$ $a = i^2 = -1$ , care este număr întreg	3p 2p
2.	$\Delta = 49 - 4m$ $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{49}{4}\right]$ , deci cel mai mare număr natural $m$ pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	2p 3p
3.	$3^x(1+3+3^2) = 117 \Leftrightarrow 3^x = 9$ $x = 2$	3p 2p
4.	$C_n^2 = 36$ , unde $n$ este numărul de elemente ale mulțimii $\frac{n(n-1)}{2} = 36$ , deci $n = 9$	3p 2p
5.	Mijlocul segmentului $AB$ este punctul $M(1, -1)$ Ecuația medianei din $C$ este $y+1 = \frac{1}{2}(x-1)$ , deci $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$	2p 3p
6.	$\cos x \sin x + \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $x = \frac{\pi}{4}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + 0 + 0 - 3 - 0 - 0 = -5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 6a - 5$ , pentru orice număr real $a$ $a = 1$ sau $a = 5$	3p 2p
c)	Pentru $a = 1$ , sistemul este $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem $x_0 = 0$ , deci $y_0 + z_0 = 1$ $x_0^2 = y_0 z_0 \Rightarrow y_0 z_0 = 0$ , deci soluțiile sunt $(0, 1, 0)$ sau $(0, 0, 1)$ , care convin	3p 2p

<b>2.a)</b>	$x * y = 5xy - 5x - 5y + 5 + 1 =$ $= 5x(y-1) - 5(y-1) + 1 = 5(x-1)(y-1) + 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * x = 5(x-1)^2 + 1$ , $x * x * x = 25(x-1)^3 + 1$ $(x-1)^3 < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19 \Leftrightarrow \frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$ Cum $n$ este număr natural nenul, obținem $n = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x-2(x-1)}{x^2} =$ $= \frac{x-2x+2x-2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = -1$ $\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ , care nu convine sau $a = 1$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (0, 2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$ și, cum $f(1) = 0$ , obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 - 0 = 12$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1  g(x)  dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} \ln 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	Funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $h(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt - x$ este derivabilă și $h'(x) = e^{x^2+1} - 1$ $h'(x) > 0$ pentru orice număr real $x$ , deci $h$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0) = 0$ , există un unic număr real $x$ pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = x$	<b>2p</b> <b>3p</b>