

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
iulie 2022

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | a) $k \in \mathbb{Z}$ este soluție a ecuației, deci $k^2 + k + m = 0 \Rightarrow m = -k^2 - k$, de unde obținem $m \in \mathbb{Z}$ $m = -k(k+1)$, deci numărul întreg m este divizibil cu 2 | 4p 3p |
| | b) $x_1^3 + x_1^2 = -mx_1$, $x_2^3 + x_2^2 = -mx_2$, $x_1 + x_2 = -1$, $m \in \mathbb{R}^*$ | 3p |
| | $x_1 x_2 = m \Rightarrow \frac{x_1^2 + 1}{x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2^3 + x_2^2} = -\frac{1}{m} \left(\frac{x_1^2 + 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2} \right) = -\frac{1}{m} \left(-1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{m+1}{m^2}$, $m \in \mathbb{R}^*$ | 3p |
| | $\frac{m+1}{m^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$, de unde obținem $m = -2$ | 2p |
| 2. | a) AD este bisectoarea unghiului BAC , deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ Triunghiurile MAN și MAP sunt dreptunghice, au latura AM comună și $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MAP$ $\Delta MAN \equiv \Delta MAP$, de unde obținem $AN \equiv AP$ | 2p 3p 2p |
| | b) Dacă $DQ \perp AC$, $Q \in AC$, obținem că $MP \parallel DQ$ și, cum $AM = MD$, obținem că MP este linie mijlocie în ΔADQ , deci punctul P este mijlocul segmentului AQ | 3p |
| | $AP = PQ$, $AN = AP$ și $AC = 3AN$, deci $PQ = QC$ și, cum $DQ \perp AC$, obținem că triunghiul DPC este isoscel, deci $DP = DC$ | 3p |
| | $\Delta ADN \equiv \Delta ADP$, deci $DN = DP$, de unde obținem că $DN = DC$, deci triunghiul CDN este isoscel | 2p |
| 3. | a) $M(z) + M(-z) = A + zB + A + (-z)B = 2A$, pentru orice număr complex z | 3p |
| | $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, deci $\det(2A) = 2^3 \det A$ și, cum $\det A = 1$, obținem că $\det(M(z) + M(-z)) = 8$, pentru orice număr complex z | 4p |
| | b) Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, obținem $M(z) = \begin{pmatrix} a_{11} + z & a_{12} + z & a_{13} + z \\ a_{21} + 2z & a_{22} + 2z & a_{23} + 2z \\ a_{31} + 3z & a_{32} + 3z & a_{33} + 3z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$ | 2p |
| | $\det(M(z)) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} + z & a_{13} + z \\ a_{21} - 2a_{11} & a_{22} - 2a_{12} & a_{23} - 2a_{13} \\ a_{31} - 3a_{11} & a_{32} - 3a_{12} & a_{33} - 3a_{13} \end{vmatrix} \Rightarrow \det(M(z)) = \alpha z + \beta$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ | 2p |
| | $M(0) = A$, deci $\det(M(0)) = 1$, de unde obținem $\beta = 1$, deci $\det(M(z)) = \alpha z + 1$, $z \in \mathbb{C}$ $\det(M(1)) = \det(M(2))$, deci $\alpha + 1 = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 0$, de unde obținem $\det(M(z)) = 1$, pentru orice număr complex z | 2p 2p |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 4. | <p>a) $f'(x) = \frac{x^3 + 2 - 3x^3}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2(1 - x^3)}{(x^3 + 2)^2}, x \in [0, +\infty)$</p> <p>Cum $x^3 > 1$, pentru orice $x > 1$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$</p> | 4p |
| | <p>b) $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 2)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3 + 2)^2} dx =$</p> <p>$= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 2)'}{(x^3 + 2)^2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^3 + 2} \Big _0^1 =$</p> <p>$= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18}$</p> | 3p |
| | | 3p |
| | | 2p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | |
|--|---|
| <p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> |
| <p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> |
| <p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> |