

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Arătați că $(f \circ f)(3) = 9$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6) = 6 - \log_2(x+6)$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD . Arătați că $\overline{CE} = \frac{1}{4}\overline{CA} - \frac{1}{2}\overline{BC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{4}$ și $B = \frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ ax + 4y + z = 6 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e = \frac{3}{2}$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x} * x * \frac{1}{x} = x * \frac{1}{x} * x$.
- 5p c) Arătați că **nu** există numere întregi x și y , astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 8 \ln x + 12 - 8 \ln 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-2)^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .

- 5p** c) Se consideră numerele reale a , b și c astfel încât punctul $M(a, b)$ este situat pe graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 8\ln 2 + 8\ln x$ și punctul $N(a, c)$ este situat pe graficul funcției $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 8x - 12$. Demonstrați că $b \geq c$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$.
- 2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = -\frac{11}{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural n , se consideră $I_n = \int_1^2 x^n f(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty$.