

Examenul național de bacalaureat 2023  
Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $(a+bi)(1+i)=4$ , unde  $i^2=-1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=mx^2-2x+m$ , unde  $m$  este număr real nenul. Determinați numerele reale  $m$  pentru care  $f(m-x)=f(m+x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$ .
- 5p** 4. Se consideră mulțimile  $A=\{1,2,3,4\}$  și  $F=\{f|f:A \rightarrow A\}$ . Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $f$  din mulțimea  $F$ , acesta să verifice inegalitatea  $f(n) \leq n$ , pentru orice  $n \in A$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(5,3)$  și  $B(-1,5)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$ , știind că  $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{OC}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB=8$ , măsura unghiului  $C$  de  $30^\circ$  și punctul  $O$ , centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Determinați distanța de la punctul  $O$  la latura  $AB$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$ , unde  $a, b$  și  $c$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0))=5$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele reale  $b$  și  $c$  pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real  $a$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^4 + aX^3 + aX^2 + 8X - 8$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $f(-1) = -15$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g = X^2 - 1$  este egal cu  $15X$ .
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real  $a$ , polinomul  $f$  **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x - (x^4 - 1)\arctg x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = -x^2(4x\arctg x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  care este paralelă cu axa  $Ox$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)$ , pentru orice  $x \in [0,1]$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{1 + e^{-x}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = 8 + e^3$ .

5p b) Arătați că  $\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = m$ , pentru orice  $m \in (0, +\infty)$ .

5p c) Determinați numărul real nenul  $a$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$ .

<https://variante-mate.ro>