

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele  $5 - 2\sqrt{6}$ , 1 și  $5 + \sqrt{24}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + 1$ , unde  $a$  este număr real nenul. Determinați numărul real nenul  $a$  pentru care  $(f \circ f)(1) = 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = 32$ .
- 5p 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, 1)$  și  $B(2, 5)$ . Determinați ecuația dreptei  $d$  care trece prin punctul  $B$  și este perpendiculară pe dreapta  $AB$ .
- 5p 6. Arătați că  $(\operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = 2\operatorname{ctg} 2x$ , pentru orice  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + y + (a+1)z = a \\ x + ay - z = 4 \\ 2x - ay + 4z = -4 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = -9$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Arătați că, dacă sistemul are soluția unică  $(x_0, y_0, z_0)$ , atunci  $x_0 + y_0 + z_0 = 2$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 3X^2 + 2X + m$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p a) Pentru  $m = 6$ , arătați că  $f(-1) = 0$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $m$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $g = X^2 + 2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $f(x) - x \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$ , pentru orice  $x \in (-1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 3(f(x) - x \ln x) dx = 7$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3} dx = 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right)$ .

**5p** c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$  are aria strict mai mare decât 1.

<https://variante-mate.ro>