

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

14 iulie 2021

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .
- 7p a) Arătați că  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4$ , pentru orice număr real nenul  $x$ .
- 8p b) Demonstrați că orice dreaptă paralelă cu axa  $Ox$  intersectează graficul funcției  $f$  în exact două puncte.
2. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $ACB$  de  $50^\circ$ . Punctele  $M$  și  $N$  sunt situate pe latura  $AB$  astfel încât unghiurile  $ACM$  și  $NCB$  au măsura de  $10^\circ$ .
- 7p a) Arătați că  $MB = MC$ .
- 8p b) Demonstrați că  $BN = 2AM$ .
3. Se consideră  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  rădăcinile polinomului  $f = X^3 - (a+1)X - a$ , unde  $a$  este număr real.
- 7p a) Arătați că, pentru orice număr real  $a$ , polinomul  $f$  se divide cu polinomul  $X + 1$ .
- 8p b) Știind că  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  sunt numere întregi, demonstrați că numărul  $a$  este produsul a două numere naturale consecutive.
4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$ .
- 7p a) Arătați că  $\sqrt{x^2 + 9} \cdot f'(x) = f(x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 8p b) Arătați că  $\int_0^4 \ln(f(x)) dx = 8 \ln 3 - 2$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VI-a
<b>1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Recunoașterea unor triunghiuri isoscele/echilaterale/ascuțitunghice/dreptunghice/obtusunghice în configurații geometrice date</li><li>- Recunoașterea elementelor caracteristice triunghiurilor în desene, machete, mediul înconjurător etc.</li><li>- Descrierea unor caracteristici ale configurațiilor geometrice date referitoare la triunghi (prin observare, prin utilizarea instrumentelor geometrice)</li><li>- Recunoașterea unor triunghiuri congruente într-o configurație geometrică dată</li></ul>
<b>2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Stabilirea tipului de triunghi prin efectuarea de calcule numerice cu lungimi de segmente și măsuri de unghiuri</li><li>- Efectuarea de calcule numerice pentru formularea de răspunsuri privind liniile importante în triunghi</li><li>- Efectuarea de măsurători cu raportorul și rigla pentru formularea de răspunsuri privind unghiurile exterioare ale unui triunghi, inegalități între laturi/unghiuri ale unui triunghi</li></ul>
<b>3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Stabilirea congruenței unor triunghiuri identificând criteriul de congruență potrivit</li></ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizarea relației de congruență a triunghiurilor pentru stabilirea congruenței unor segmente sau unghiuri</li> <li>- Utilizarea proprietăților triunghiurilor isoscele/echilaterale/dreptunghice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri, proprietăți ale punctelor de pe mediatoare, bisectoare</li> </ul>
<p><b>4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Transcrierea în limbaj simbolic a caracteristicilor triunghiurilor conținute în figuri geometrice date</li> <li>- Transcrierea, din figuri geometrice date, în limbaj simbolic a caracteristicilor liniilor importante în triunghi</li> <li>- Redactarea datelor cunoscute (ipoteze) și a celor necunoscute (concluzii), în raport cu o situație dată referitoare la triunghi</li> <li>- Evidențierea unor relații și proprietăți: unghi exterior unui triunghi, inegalități între laturi și relații între laturi și unghiuri ale unui triunghi etc.</li> </ul>
<p><b>5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Construcția unei configurații geometrice cu triunghiuri având proprietăți date, cu ajutorul instrumentelor geometrice sau al softurilor matematice</li> <li>- Analizarea setului de ipoteze ale unei probleme și elaborarea unei strategii de rezolvare prin raportarea adecvată la proprietățile studiate ale triunghiurilor</li> <li>- Analizarea și validarea veridicității unei afirmații folosind raționamente simple referitoare la triunghi</li> <li>- Analizarea validității unor enunțuri referitoare la triunghiuri rezultate prin modificarea unei ipoteze (necesar/suficient) sau prin interschimbarea unor informații din ipoteză și din concluzie</li> </ul>
<p><b>6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Modelarea geometrică a unei situații concrete, asociind acesteia un desen, implicând și estimări (de exemplu, un traseu acasă – școală – teren de sport, reprezentat printr-un triunghi)</li> <li>- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie</li> <li>- Realizarea de conexiuni interdisciplinare sau practic-aplicative (de exemplu: planul înclinat, traseul de lungime minimă, reflexia)</li> </ul>

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
<b>Geometrie</b>	<p><b>6. TRIUNGHIUL</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru; suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior</li> <li>• Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție)</li> <li>• Linii importante în triunghi: bisectoarele unghiurilor unui triunghi: concurența (fără demonstrație), cercul înscris în triunghi; mediatoarele laturilor unui triunghi: concurență (fără demonstrație), cercul circumscris unui triunghi; înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație); medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurența (fără demonstrație)</li> <li>• Congruența triunghiurilor oarecare: criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL; criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU</li> <li>• Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi/mediatoarea unui segment</li> <li>• Proprietăți ale triunghiului isoscel; proprietăți ale triunghiului echilateral</li> <li>• Proprietăți ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de <math>30^\circ</math>, mediana corespunzătoare ipotenuzei – teoreme directe și reciproce); teorema lui Pitagora (fără demonstrație, verificări de triplete de numere pitagoreice, determinarea de lungimi folosind pătratele unor numere naturale)</li> </ul>

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru evaluarea la finalul unității de învățare „Linii importante în triunghi”, a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un *item de tip completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate și a activității de învățare selectate;
- respectarea formatului fiecărui item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

<https://variante-mate.ro>