Exerciţii rezolvate cu numere complexe

Enunţuri

Ex.1.

Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

Variante M1 bac 2009

Ex.2.

Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

Variante M1 bac 2009

Ex.3.

Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

Variante M1 bac 2009

Ex.4.

Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{8+i}{7-4i}$.

Variante M1 bac 2009

Ex.5.

Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^2=-4$.

Variante M1 bac 2009

Ex.6.

Ştiind că $z\in\mathbb{C}$ şi că $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.

Variante M1 bac 2009

Ex.7.

Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

Variante M1 bac 2009

Ex.8.

Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

Variante M1 bac 2009

Rezolvări

Ex.1.

$$\left(1-i\right)^{24}=\left[\left(1-i\right)^{2}\right]^{12}=\left(-2i\right)^{12}=2^{12}\cdot i^{12}=2^{12}\in\mathbb{R}$$

Ex.2.

$$\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^{2}=\left(\frac{1+i-1+i}{(1-i)(1+i)}\right)^{2}=\left(\frac{2i}{1-i^{2}}\right)^{2}=i^{2}=-1\in\mathbb{R}$$

Ex.3.

$$\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}=\frac{1-2i+1+2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2}{1-4i^{2}}=\frac{2}{5}$$

Ex.4.

$$|z|=\left|\frac{8+i}{7-4i}\right|=\frac{|8+i|}{|7-4i|}=\frac{\sqrt{8^{2}+1^{2}}}{\sqrt{7^{2}+(-4)^{2}}}=\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}}=1$$

Ex.5.

$z^{2}+4=0$

$a=1, b=0, c=4 \Rightarrow \Delta=-16<0$ deci ecuaţia are două rădăcini complexe conjugate.

$$z_{1},z_{2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{\pm4i}{2}=\pm2i$$

Ex.6.

Mai intai observă că $z\neq0$

$$z^{2}+z+1=0\Rightarrow(z-1)(z^{2}+z+1)=0\Rightarrow z^{3}-1=0\Rightarrow z^{3}=1$$

$$z^{4}=z^{3}\cdot z=z$$

$$z^{4}+\frac{1}{z^{4}}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^{2}+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$$

Ex.7.

$$z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^{6}=2^{6}\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=2^{6}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-2^{6}\qquad\Rightarrow \operatorname{Re} z=-2^{6}=-64.$$

Ex.8.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3}=\left[2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{3}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{3}=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-8\in\mathbb{R}$$