http://matematica.noads.biz

Exerciţii rezolvate cu polinoame

Enunţuri

Ex.1.

Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ şi $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.

c) Pentru $a = \hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

b) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.

c) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$

a) Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relaţia $b^6 = \hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4}), \forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Variante M1 bac 2009

Ex.5.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ şi $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

Variante M2 bac 2009

http://variante-mate.ro

http://matematica.noads.biz

Ex.6.

Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze diferența $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

Variante M2 bac 2009

http://variante-mate.ro

http://matematica.noads.biz

Rezolvări:

Ex.1.

a) $h = X^4 - 4X^2 + 2X^3 - 8X - 24X^2 + 96 = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$ este forma algebrică a polinomului h.

b)Prin identificarea coeficienţilor obţinem că polinoamele f şi h sunt egale pentru $a = 2$ şi $b = -8$.

c)Ecuaţia dată se scrie sub forma $\left(2^x\right)^4 + 2\cdot\left(2^x\right)^3 - 28\cdot\left(2^x\right)^2 - 8\cdot 2^x + 96 = 0$

Facem substituţia $2^x = y$ şi obţinem ecuaţia $y^4 + 2y^3 - 28y^2 - 8y + 96 = 0$

Folosind punctual b) obţinem $\left(y^2 + 2y - 24\right)\left(y^2 - 4\right) = 0$.

$y^2 + 2y - 24 = 0$ are soluţiile $y_1 = 4$ şi $y_2 = -6$

$y^2 - 4 = 0$ are soluţiile $y_3 = 2$ şi $y_4 = -2$.

Revenind la notaţia făcută avem $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1$.

Ex.2.

a) $f \vdots g \Leftrightarrow f(-\hat{3}) = \hat{0} \Leftrightarrow f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow \hat{3} + \hat{4}a + \hat{2} + \hat{1} = \hat{0}$

$\hat{4}a + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow \hat{4}a = -\hat{1} \Rightarrow \hat{4}a = \hat{4} \Rightarrow a = \hat{1}$.

b) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$

$(X + \hat{1})(X^2 + \hat{1}) = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$ c.c.t.d.

c) $f(x) = \hat{0} \Leftrightarrow (x + \hat{1})(x^2 + \hat{1}) = \hat{0}$

$x + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow x = -\hat{1} \Rightarrow x = \hat{4}$

Pentru ecuaţia $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ se încearcă toate elementele mulţimii $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi se mai obţin soluţiile $x = \hat{2}$ şi $x = \hat{3}$.

In concluzie ecuaţia dată are soluţiile $x = \hat{2}$, $x = \hat{3}$ şi $x = \hat{4}$.

Ex.3.

a)Polinoamele f şi g sunt egale dacă şi numai dacă avem:

$$\begin{cases} \hat{3}a + \hat{3}b = \hat{2} \\ \hat{2}a + \hat{3}b = \hat{3}a + \hat{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{3}(a+b) = \hat{2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \hat{4} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}a = \hat{4} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \hat{2}.$$

b)Pentru $a = b = \hat{2}$ avem $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}X$.

$f(\hat{0}) = \hat{0}$

$f(\hat{1}) = \hat{4}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}$

$f(\hat{3}) = \hat{4}$

$f(\hat{4}) = \hat{0}$

$f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4}) = \hat{0} + \hat{4} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{0} = \hat{0}$.

c)Deoarece $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{4}) = \hat{0}$ rezultă că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = \hat{0}$ sunt $x = \hat{0}$ şi $x = \hat{4}$.

Ex.4.

a) $\mathbb{Z}_7 = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{6}\right\}$ este mulţime finită deci le putem verifica pe toate:

http://variante-mate.ro

http://matematica.noads.biz

$\left(\hat{1}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{2}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{3}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{4}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{5}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{6}\right)^6=\hat{1}$

b) $\left(x^3-\hat{4}\right)\left(x^3+\hat{4}\right)=x^6-\hat{2}=x^6+\hat{5},\forall x\in\mathbb{Z}_7$

c) Fie $a\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0}$. Tripletul $\left(\mathbb{Z}_7,+,\cdot\right)$ este corp comutativ (deoarece 7 este prim) deci există $a^{-1}\in\mathbb{Z}_7, a^{-1}\neq\hat{0}$.

$f(a^{-1})=\left(a^{-1}\right)^6+a\cdot a^{-1}+\hat{5}=\hat{1}+\hat{1}+\hat{5}=\hat{0}$ deci f este divizibil prin $X-a^{-1}$ adică f este reductibil in $\mathbb{Z}_7[X]$.

Pentru $a=\hat{0}$ avem $f=x^6+\hat{5}=\left(x^3-\hat{4}\right)\left(x^3+\hat{4}\right)$ deci f este reductibil şi in acest caz.

Ex.5.

a) $f\left(\hat{1}\right)\cdot g\left(\hat{0}\right)=\hat{2}\cdot\hat{0}=\hat{0}.$

b) $(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}=(\hat{3}X+\hat{3})(X^2+\hat{2}X)+\hat{2}X+\hat{2}=f$.

c) Din b) rezultă că $f(x)=(x+\hat{1})(\hat{3}g+\hat{2})=(x+\hat{1})(\hat{3}x^2+x+\hat{2})=\hat{0}$

de unde $x+\hat{1}=\hat{0}$ cu soluția $x=\hat{4}$ şi $\hat{3}x^2+x+\hat{2}=\hat{0}$ care nu are soluții în $\mathbf{Z}_5$.

În concluzie,polinomul *f* are o singură soluție în $\mathbf{Z}_5$ şi anume $x=\hat{4}$.

Ex.6.

a) Aplicăm relațiile lui Viete pentru cele două polinoame: $S=-3, S'=2\Rightarrow S-S'=-5.$

b) Folosim teorema împărțirii cu rest şi obținem câtul $q=X+5$ şi restul $r=12X-4.$

c) Rădăcinile y_1, y_2 ale polinomului g sunt $y_1=y_2=1$. Rezultă $f(y_1)\cdot f(y_2)=\left(f(1)\right)^2=64$

http://variante-mate.ro