EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2018 - 2019

Matematică

Model

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $18+18:6$ este egal cu ... .

5p **2.** Dacă $\frac{x}{4}=\frac{5}{2}$, atunci numărul x este egal cu ... .

5p **3.** Cel mai mare număr par din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ este egal cu ... .

5p **4.** Punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Dacă $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$ și $AC=10\text{cm}$, atunci perimetrul triunghiului DEF este egal cu ... cm.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului determinat de dreptele AD' și BB' este egală cu ...°.

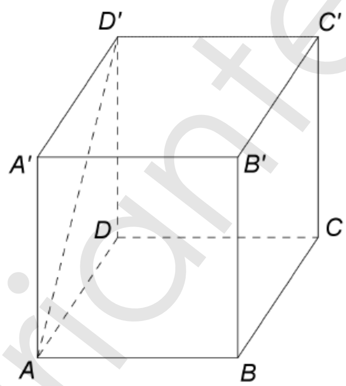


Figura 1

5p **6.** În tabelul următor sunt prezentate informații referitoare la țările reprezentate într-un proiect internațional și la numărul de participanți din fiecare țară.

Țara	România	Italia	Franța	Olanda	Spania	Polonia
Număr de participanți	15	8	10	5	3	9

Conform tabelului, procentul reprezentat de numărul de participanți din Franța, din numărul total de participanți este ...%.

Soluţii

Subiectul 1

1. $18+18:6=18+3=21$

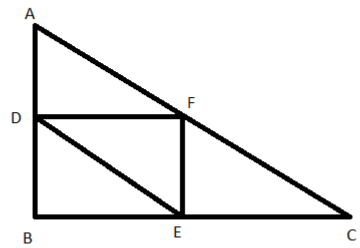
Răspuns:**21**

2. $x=\frac{4\cdot 5}{2}=\frac{20}{2}=10$

Răspuns:**10**

3. Răspuns:**6**

4.



DE, EF și DF sunt linii mijlocii în triunghiul ABC.

$$\left.\begin{aligned} DE &= \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ DF &= \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ EF &= \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{\Delta DEF} = DE + DF + EF = 5 + 4 + 3 = 12$$

Răspuns: **12**

5. $m\left(\sphericalangle\left(AD', BB'\right)\right) = m\left(\sphericalangle\left(AD', AA'\right)\right) = m\left(\sphericalangle\left(A'AD'\right)\right) = 45^0$

Răspuns: 45^0

6. Numărul total de participanți este 50.

$$10 = \frac{p}{100} \cdot 50$$

$$10 = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 20$$

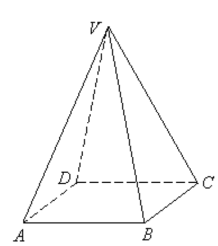
Răspuns: **20**

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$.
5p	**2.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ și $b = 7 - \frac{12}{\sqrt{3}}$ este egală cu 7.
5p	**3.** Dacă elevii unei clase se așază câte trei în bancă, rămân patru bănci libere, iar dacă se așază câte doi în bancă, un elev rămâne singur în bancă și nu rămân bănci libere. Determinați numărul de bănci din această clasă.
	4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 6$, unde a este număr real nenul.
5p	**a)** Pentru $a = -2$, reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.
5p	**b)** În sistemul de coordonate xOy se consideră A și B, punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy. Determinați numerele reale a, știind că $\mathrm{tg}\left(\sphericalangle OAB\right) = 2$.
5p	**5.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} - \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} - \frac{1}{9-x^2}\right) : \frac{x+2}{x^2-9}$, unde x este număr real, $x \neq -3$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 3$. Determinați numărul real m, știind că $E(m) = 2m + 1$.

<u>**Subiectul 2**</u>

1.



2. $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$

$b=7-\frac{12}{\sqrt{3}}=7-\frac{12\sqrt{3}}{3}=7-4\sqrt{3}$

$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{2}=\frac{14}{2}=7$

3. Notăm cu e numărul de elevi din clasă și cu b numărul de bănci din clasă.
Din condițiile din enunț se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} e=3(b-4) \\ e=2b-1 \end{cases}$$

$3(b-4)=2b-1$

$3b-12=2b-1$

$3b-2b=12-1$

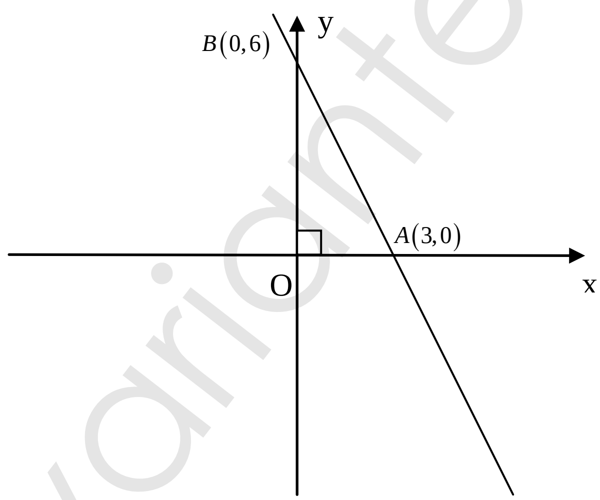
$b=11$

În clasă sunt 11 bănci și 21 de elevi.

4.a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad,\quad f(x)=-2x+6$

$f(3)=-2\cdot3+6=-6+6=0\Rightarrow A(3,0)$

$f(0)=-2\cdot0+6=6\Rightarrow B(0,6)$



b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad,\quad f(x)=ax+6$

Pentru a afla intersecția graficului cu axa Ox rezolvăm ecuația $f(x)=0$

$ax+6=0\Rightarrow x=-\frac{6}{a}\Rightarrow A\left(-\frac{6}{a},0\right)\Rightarrow OA=\left|-\frac{6}{a}\right|=\frac{6}{|a|}$

Pentru a afla intersecția graficului cu axa Oy calculăm $f(0)$

$f(0)=a\cdot0+6=6\Rightarrow B(0,6)\Rightarrow OB=6$

Triunghiul AOB este drepunghic în O.

$tg(\sphericalangle OAB)=\frac{cateta\_opusa}{cateta\_alaturata}=\frac{OB}{OA}=\frac{6}{\frac{6}{|a|}}=6\cdot\frac{|a|}{6}=|a|$

Rezultă $|a|=2$ de unde obținem $a=2$ sau $a=-2$

5. Aducem expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

$E(x)=\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{x^2-9}\right)\cdot\frac{x^2-9}{x+2}=\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right)\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=$

$$=\left(\frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right)\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=\frac{(x+3)(x+1)-(x-3)(x+2)+1}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=$$

$$=\frac{x^2+x+3x+3-x^2-2x+3x+6+1}{x+2}=\frac{5x+10}{x+2}=\frac{5(x+2)}{x+2}=5 \text{ pentru } \forall x\in\mathbb{R}, x\neq -3, x\neq -2, x\neq -1 \text{ și } x\neq 3$$

$$\left.\begin{array}{l} E(m)=2m+1 \\ E(m)=5 \end{array}\right\}\Rightarrow 2m+1=5$$

Rezultă $m=2$ care convine.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $BC=CD=AD=6\text{cm}$ și $AB=12\text{cm}$. Punctul E este simetricul punctului D față de dreapta AB, iar F și G sunt punctele de intersecție a dreptei CD cu dreptele EA, respectiv EB.

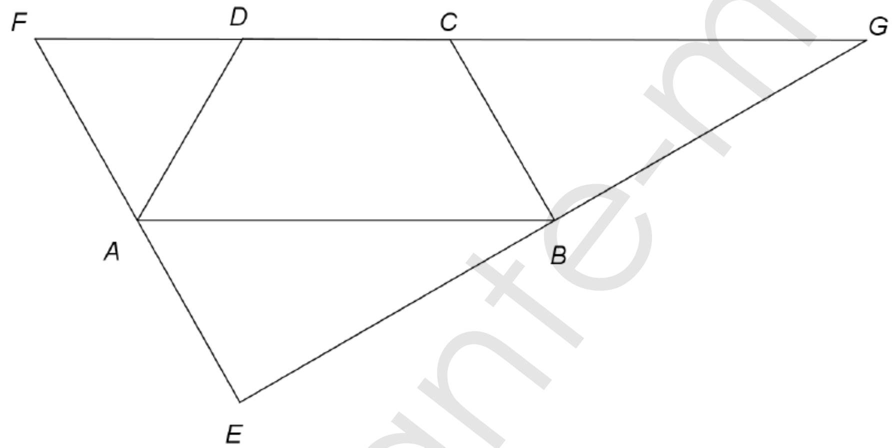


Figura 2

5p **a)** Arătați că perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu 30cm.

5p **b)** Demonstrați că triunghiul ADF este echilateral.

5p **c)** Demonstrați că dreptele EF și EG sunt perpendiculare.

2. În *Figura 3* este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB=10\text{cm}$ și $AA'=12\text{cm}$. Punctul M este situat pe muchia AA' astfel încât $AM=9\text{cm}$ și punctul P este mijlocul muchiei AA'.

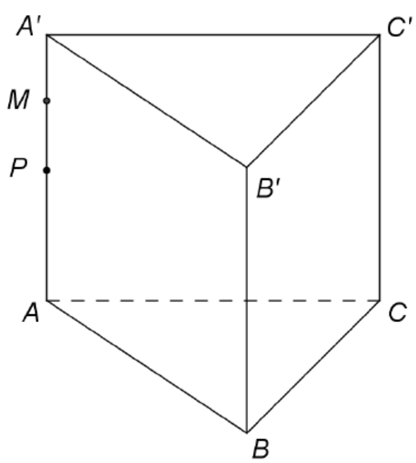


Figura 3

5p **a)** Arătați că aria laterală a prismei $ABCA'B'C'$ este egală cu 360cm^2.

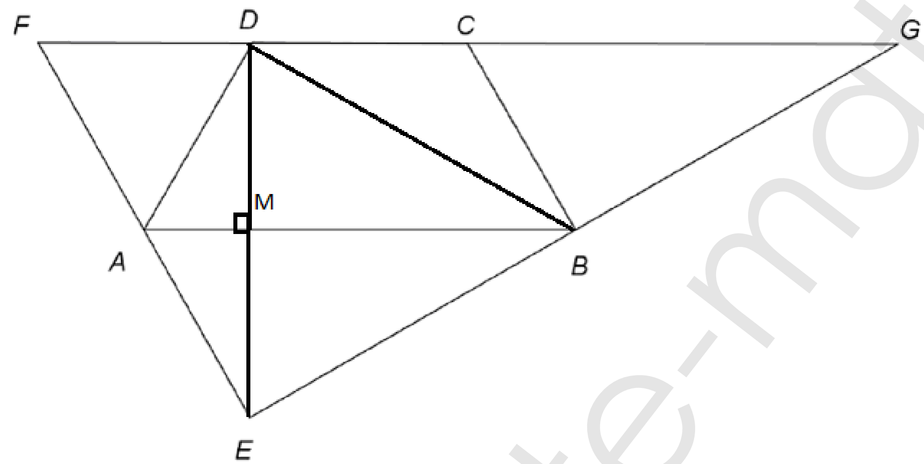
5p **b)** Arătați că distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu $2\sqrt{39}\text{cm}$.

5p **c)** Demonstrați că dreapta PO este paralelă cu planul (MBC), unde punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul 3

1.a) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 12 + 6 + 6 + 6 = 30cm$

b) Fie $\{M\} = AB \cap DE$ ca în figura de mai jos.



ΔAMD este dreptunghic în M cu ipotenuza $AD = 6cm$.

Deoarece ABCD este trapez isoscel avem $AM = \frac{AB - CD}{2} = \frac{12-6}{2} = 3cm$

$\cos(\sphericalangle DAM) = \frac{cateta\_alaturata}{ipotenuza} = \frac{AM}{AD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de unde obținem că $m(\sphericalangle DAM) = 60^0$.

Deoarece E este simetricul punctului D față de dreapta AB avem $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle EAM$ deci $m(\sphericalangle EAM) = 60^0$.

$m(\sphericalangle DAF) = 180^0 - m(\sphericalangle DAM) - m(\sphericalangle EAM) = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$

$AB \| CD$ deci $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle DAM$ (alterne interne) de unde rezultă că $m(\sphericalangle ADF) = 60^0$.

În triunghiul ADF cunoaștem două unghiuri:

$m(\sphericalangle DAF) = 60^0$

$m(\sphericalangle ADF) = 60^0$

deci triunghiul ADF este echilateral.

c) $m(\sphericalangle BCD) = 180^0 - m(\sphericalangle ABC) = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Triunghiul BCD este isoscel de unde rezultă $m(\sphericalangle CBD) = \frac{180^0 - m(\sphericalangle BCD)}{2} = 30^0$

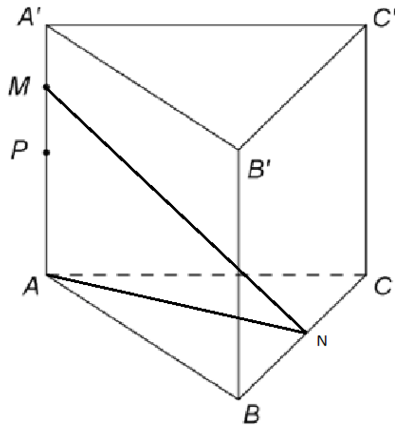
$m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle CBD) = 60^0 - 30^0 = 30^0$

Deoarece E este simetricul punctului D față de dreapta AB avem $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle ABD) = 30^0$.

În triunghiul ABE avem $m(\sphericalangle AEB) = 180^0 - 60^0 - 30^0 = 90^0$ deci $EF \perp EG$.

2.a) $A_{laterala} = P_{bazei} \cdot h = 3 \cdot 10 \cdot 12 = 360cm^2$

b)



Construim $MN \perp BC$, $N \in BC$ deci $d\left(M, BC\right) = MN$.

Deoarece $MA \perp \left(ABC\right)$ și $BC \subset \left(ABC\right)$ rezultă conform primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare că $AN \perp BC$.

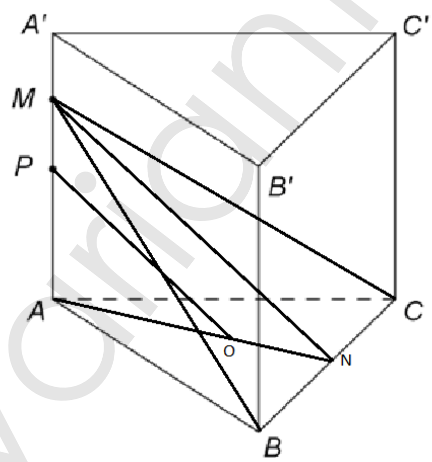
AN este înălțime în triunghiul echilateral ABC deci $AN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}cm$.

Din $MA \perp \left(ABC\right)$ și $AN \subset \left(ABC\right)$ rezultă $MA \perp AN$ deci triunghiul MAN este dreptunghic în A.

Din teorema lui Pitagora în triunghiul MAN avem:

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{9^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{81 + 75} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}cm$

c)



$AP = 6cm$ și $AM = 9cm$

$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Punctul O este și centru de greutate pentru ΔABC deci se află la o treime de bază și două treimi de vârf.

$\Rightarrow \frac{AO}{AN} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AO}{AN}$ deci $PO \parallel MN$ și cum $MN \subset \left(MBC\right)$ rezultă că $PO \parallel \left(MBC\right)$.