http://variante-mate.ro

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=2$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=4$.

5p **4.** Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x+2y-1=0$.

5p **6.** Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu $45°$.

Soluții

Subiectul1

1. $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=\log_2\left[\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\right]=\log_2\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2\right)=\log_2(7-3)=\log_2 4=2$

2.Aflăm punctele in care graficul intersectează axa Ox.Pentru aceasta rezolvăm ecuația $f(x)=0$.

Ecuația $x^2+5x+4=0$ are soluțiile $x_1=-4$ și $x_2=-1$.

Punctele de intersecție dintre axa Ox și grafic sunt $A(-4,0)$ și $B(-1,0)$ iar distanța dintre ele este 3.

3.Ecuația dată se transformă astfel:

$3^x+3^x\cdot 3=4$

Facem notația $3^x=t$ și obținem $t+3t=4\Rightarrow t=1$.

Revenim la notația făcută:

$3^x=1\Rightarrow x=0$.

4.Un termen oarecare din dezvoltare este dat de formula $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$.

$$T_{k+1}=C_{20}^k x^{20-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{20}^k\frac{x^{20-k}}{x^{\frac{k}{2}}}=C_{20}^k x^{20-k-\frac{k}{2}}=C_{20}^k x^{20-\frac{3k}{2}}.$$

$$20-\frac{3k}{2}=14\Rightarrow\frac{3k}{2}=6\Rightarrow k=4$$

Termenul care conține pe x^{14} este $T_{k+1}=T_5$ și are rangul 5.

5.Calculăm panta dreptei d:

$3x+2y-1=0\Rightarrow 2y=-3x+1\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ deci dreapta d are panta $m_d=-\frac{3}{2}$.

Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.

Ecuația dreptei cerute se află cu formula $y-y_o=m(x-x_0)$

$y-3=-\frac{3}{2}(x-3)\Rightarrow 2y-6=-3x+9\Rightarrow 3x+2y-15=0$ este ecuaţia dreptei cerute.

6. Aplică teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ din care reţinem doar $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$.

Mai departe avem:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{2}{\sin 45^0}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}\Rightarrow 2\sin C=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2\sin C=1\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}$$

Sunt două unghiuri intre 0^0 şi 180^0 care au sinusul $\frac{1}{2}$ şi anume 30^0 şi 150^0.

Unghiul C nu poate fi de 150^0 deoarece in acest caz suma unghiurilor triunghiului ABC ar fi mai mare de 180^0.
In concluzie unghiul C este de 30^0.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+ay+(2a+4)z=1\\(a+2)x+ay+(a+1)z=1\\(a+1)x+(2a-1)y+3z=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.
5p	**a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
5p	**c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.
	2. Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3},\ f\in\mathbb{Z}_5[X]$.
5p	**a)** Arătați că $a^5=a$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.
5p	**b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.
5p	**c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Subiectul 2

1.a)

$$\det A=\begin{vmatrix}-1 & a & 2a+4\\ a+2 & a & a+1\\ a+1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=\ldots$$

Adunăm ultimele două coloane la prima şi obţinem:

$$\ldots=\begin{vmatrix}3a+3 & a & 2a+4\\ 3a+3 & a & a+1\\ 3a+3 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 1 & a & a+1\\ 1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 0 & 0 & -a-3\\ 0 & a-1 & -2a-1\end{vmatrix}=$$

$$=(3a+3)(a-1)(a+3)=(3a^2-3)(a+3)=3a^3+9a^2-3a-9$$

b)Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul său este diferit de 0.

$\det A=0\Leftrightarrow(3a+3)(a-1)(a+3)=0\Leftrightarrow a\in\{-1,1,-3\}$

Sistemul este compatibil determinat pentru $a\in R\setminus\{-1,1,-3\}$.

c)Pentru $a=-2$ sistemul este compatibil determinat şi devine:

$$\begin{cases}-x-2y=1\\-2y-z=1\\-x-5y+3z=2\end{cases}$$

Determinantul său este $\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 6-2+5=9$.

Sistemul se rezolvă cu formulele lui Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -6+4-5+6=-1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+1-2=-4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4+2-2-5=-1$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\det A} = -\dfrac{1}{9} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\det A} = -\dfrac{4}{9} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\det A} = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

2.a) $Z_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

$\hat{0}^5 = \hat{0}$

$\hat{1}^5 = \hat{1}$

$\hat{2}^5 = \hat{2}$

$\hat{3}^5 = \hat{3}$

$\hat{4}^5 = \hat{4}$

b) $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3} = X^8 + X^4 + \hat{3}X^4 + \hat{3} = X^4\left(X^4 + \hat{1}\right) + \hat{3}\left(X^4 + \hat{1}\right) = \left(X^4 + \hat{1}\right)\left(X^4 + \hat{3}\right)$

c)Se calculează f de fiecare element din Z_5.

$f\left(\hat{0}\right) = \hat{3}$

Mai departe observăm că $a^4 = \hat{1}, \forall a \in Z_5, a \neq \hat{0}$.

Rezultă că $f(a) = \hat{1} + \hat{4} + \hat{3} = \hat{3}, \forall a \in Z_5, a \neq \hat{0}$

Rezultă că f nu are rădăcini in Z_5.

http://variante-mate.ro

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq 3$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.

Subiectul 3

1.a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}-1\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1$

Am aplicat mai sus regula lui l'Hospital.

b)Asimptota oblică are ecuația $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\ldots$$

Se amplifică cu expresia conjugată:

$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f are ecuația $y=2x$.

c)Funcția dată este continuă pe **R**.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\overset{(-\infty+\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^2+1}^2}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$$

$\Rightarrow$ funcția este surjectivă.

$f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in R$ deoarece $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|<1,\forall x\in R$.Rezultă că funcția este injectivă.

Din cele de mai sus rezultă că funcția este bijectivă.

Aceasta inseamnă că pentru orice $m>0$ există unic $x\in R$ astfel incat $f(x)=m$.

2.a) $I_1=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)'e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(e-1)=\dfrac{e-1}{2}$

b) $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx=\int_0^1 x^{p-1}xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}\left(x^2\right)'e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}\left(e^{x^2}\right)'dx=\dfrac{1}{2}\left(x^{p-1}e^{x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\left(x^{p-1}\right)'e^{x^2}dx\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(e-(p-1)\int_0^1 x^{p-2}e^{x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(e-(p-1)I_{p-2}\right)$$

$$\Rightarrow I_p=\frac{1}{2}\left(e-(p-1)I_{p-2}\right)\Rightarrow 2I_p=e-(p-1)I_{p-2}\Rightarrow 2I_p+(p-1)I_{p-2}=e,\forall p\geq 3$$

c) Considerăm funcţia continuă $f:[0,1]\to R$ prin formula $f(x)=xe^{x^2}$, şirul de diviziuni $\Delta_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$ cu norma $\|\Delta_n\|=\frac{1}{n}\to 0$ şi punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+...+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1^2}{n^2}}+\frac{2}{n}e^{\frac{2^2}{n^2}}+...+\frac{n}{n}e^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=$$

$$=\int_0^1 f(x)dx=I_1=\frac{e-1}{2}$$

http://variante-mate.ro

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ Finalizare	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-4$ Distanța este egală cu 3	**3p** **2p**
3.	Notăm $3^x=t$ și obținem $t+3t=4$ $t=1 \Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\cdot x^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{20}^k\cdot x^{20-k-\frac{k}{2}}$ $20-k-\frac{k}{2}=14 \Leftrightarrow k=4$ Rangul termenului este 5	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_d=-\frac{3}{2}$ Ecuația paralelei este $y-y_A=-\frac{3}{2}(x-x_A)$ adică $y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$	**2p** **3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{1}{2}$ $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, deoarece $m(\sphericalangle A)>m(\sphericalangle C)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & a & 2a+4\\ a+2 & a & a+1\\ a+1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}3a+3 & a & 2a+4\\ 3a+3 & a & a+1\\ 3a+3 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 1 & a & a+1\\ 1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 0 & 0 & -a-3\\ 0 & a-1 & -2a-1\end{vmatrix}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$ $\det A=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,1,-3\}$ $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,-3\}$	**2p** **2p** **1p**
c)	$a=-2\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=1\\ -2y-z=1\\ -x-5y+3z=2\end{cases}$	**1p**

http://variante-mate.ro

	$x=-\frac{1}{9},\ y=-\frac{4}{9},\ z=-\frac{1}{9}$	4p
2.a)	$\hat{0}^5=\hat{0},\ \hat{1}^5=\hat{1},\ \hat{2}^5=\hat{2},\ \hat{3}^5=\hat{3},\ \hat{4}^5=\hat{4}$	5p
b)	$f=X^8+X^4+\hat{3}X^4+\hat{3}=X^4\left(X^4+\hat{1}\right)+\hat{3}\left(X^4+\hat{1}\right)$	2p
	$f=\left(X^4+\hat{1}\right)\left(X^4+\hat{3}\right)$	3p
c)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{3}$	1p
	$a\neq\hat{0}\Rightarrow a^4=\hat{1}$	2p
	$f(a)=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}=\hat{3}$ pentru orice $a\neq\hat{0}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	2p
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=2$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$	2p
	$y=2x$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f	1p
c)	f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f$ este surjectivă, deci ecuația are soluție	2p
	$f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă, deci soluția este unică	3p
2.a)	$I_1=\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{e-1}{2}$	2p
b)	$2I_p=\int\limits_0^1 x^{p-1}\left(2xe^{x^2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(e^{x^2}\right)'x^{p-1}dx=e^{x^2}x^{p-1}\Big\vert_0^1-(p-1)\int\limits_0^1 e^{x^2}x^{p-2}dx$	3p
	$2I_p=e-(p-1)I_{p-2}\ \Rightarrow\ 2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$	2p
c)	Considerăm funcția continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$, șirul de diviziuni $\Delta_n=\left(\frac{k}{n}\right)_{k=\overline{0,n}}$ cu $\lVert\Delta_n\rVert\to0$ și punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$	1p
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int\limits_0^1 f(x)dx=\frac{e-1}{2}$	2p

http://variante-mate.ro