Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul $a=\log_3 2$. Arătați că $\log_3 6=1+a$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(0,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1)-\log_2(x+3)=-1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,-1)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că O este mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$.

Soluții

Subiectul1

1. Se folosesc formule de la logaritmi astfel:

$\log_3 6=\log_3(2\cdot 3)=\log_3 2+\log_3 3=\log_3 2+1=1+a$.

2.Punctul $A(0,1)$ se află pe graficul funcției f dacă și numai dacă $f(0)=1$

$f(0)=0^2-2\cdot 0+m-3=m-3$

$m-3=1$

$m=4$

3. Punem condiții de existență:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1,+\infty)$$

Pentru rezolvare procedăm astfel:

$$\log_2\frac{x+1}{x+3}=-1\Rightarrow\frac{x+1}{x+3}=2^{-1}\Rightarrow\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(x+1)=x+3\Rightarrow 2x+2=x+3\Rightarrow x=1$$

care se află in intervalul $(-1,+\infty)$ din condiția de existență.

4. Formula de calcul pentru probabilitate este $P=\dfrac{nr.cazuri.favorabile}{nr.cazuri.posibile}$.

In mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$ sunt 30 de numere deci avem 30 de cazuri posibile.

Numerele divizibile cu 7 din mulțimea dată sunt 7,14,21,28 deci avem 4 cazuri posibile.

$P=\dfrac{4}{30}=\dfrac{2}{15}$.

5. Mijlocul unui segment se află astfel $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

In cazul nostru O este mijlocul segmentului AB deci avem $O\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)\Rightarrow O\left(\dfrac{4+x_B}{2},\dfrac{-1+y_B}{2}\right)$

Dar $O(0,0)$ şi identificand coordonatele lui O obţinem:

$$\frac{4+x_B}{2}=0 \Rightarrow 4+x_B=0 \Rightarrow x_B=-4$$

$$\frac{-1+y_B}{2}=0 \Rightarrow -1+y_B=0 \Rightarrow y_B=1$$

In concluzie $B(-4,1)$.

6. Folosim teorema cosinusului:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow$$

$$7^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\cos A \Rightarrow$$

$$49=25+36-60\cdot\cos A \Rightarrow$$

$$49=61-60\cdot\cos A \Rightarrow$$

$$60\cdot\cos A=61-49 \Rightarrow$$

$$60\cdot\cos A=12 \Rightarrow$$

$$\cos A=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi se notează cu A matricea sistemului.
5p	**a)** Arătaţi că $\det A=-a^2+5a-6$.
5p	**b)** Determinaţi valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.
5p	**c)** Pentru $a=1$, rezolvaţi sistemul.
	2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=mX^5+nX$, cu $m,n\in\mathbb{Z}_5$.
5p	**a)** Determinaţi $n\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1})=m$.
5p	**b)** Pentru $m=\hat{1}$ şi $n=\hat{4}$, determinaţi rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.
5p	**c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix}=9a+2a^2+12-4a-3a^2-18=-a^2+5a-6$.

b)Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$.

Ecuaţia $-a^2+5a-6=0$ are rădăcinile $a_1=2$ şi $a_2=3$.

In final matricea A este inversabilă pentru $a\in R\setminus\{2,3\}$.

c)Pentru $a=1$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=1 \\ 4x+y+9z=1 \end{cases}$$

Determinantul său este $\det A=-1^2+5\cdot 1-6=-1+5-6=-2\neq 0$ deci sistemul este compatibil determinat şi se rezolvă cu formulele lui Cramer.

$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$ deoarece are două coloane egale.

$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9+2+12-4-3-18 = 23-25 = -2$

$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ deoarece are două coloane egale.

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1}{\det A} = \dfrac{0}{-2} = 0 \\ y = \dfrac{d_2}{\det A} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ z = \dfrac{d_3}{\det A} = \dfrac{0}{-2} = 0 \end{cases}$$

2.a) $f(\hat{1}) = m \cdot \hat{1}^5 + n \cdot \hat{1} = m + n$

$\Rightarrow m + n = m \Rightarrow n = \hat{0}$.

b) Pentru $m = \hat{1}$ şi $n = \hat{4}$ avem $f = X^5 + \hat{4}X$

$f(\hat{0}) = \hat{0}^5 + \hat{4} \cdot \hat{0} = \hat{0}$

$f(\hat{1}) = \hat{1}^5 + \hat{4} \cdot \hat{1} = \hat{1} + \hat{4} = \hat{0}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}^5 + \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$

$f(\hat{3}) = \hat{3}^5 + \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{3} + \hat{2} = \hat{0}$

$f(\hat{4}) = \hat{4}^5 + \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{4} + \hat{1} = \hat{0}$

deci rădăcinile polinomului f sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ şi $\hat{4}$.

c) $f(\hat{1}) = m \cdot \hat{1}^5 + n \cdot \hat{1} = m + n$

$f(\hat{2}) = m \cdot \hat{2}^5 + n \cdot \hat{2} = \hat{2}m + \hat{2}n = \hat{2}(m+n)$

Din ipoteză avem $f(\hat{1}) = f(\hat{2}) \Rightarrow m + n = \hat{2}(m+n) \Rightarrow m + n = \hat{0}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(\hat{3}) = m \cdot \hat{3}^5 + n \cdot \hat{3} = \hat{3}m + \hat{3}n = \hat{3}(m+n) = \hat{0} \\ f(\hat{4}) = m \cdot \hat{4}^5 + n \cdot \hat{4} = \hat{4}m + \hat{4}n = \hat{4}(m+n) = \hat{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\hat{3}) = f(\hat{4})$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)dx$.

5p **c)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=2$ şi $x=3$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2-x-1)'(x+1)-(x^2-x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2+2x-x-1-x^2+x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2},\forall x\in R\setminus\{-1\}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\cdot\ln x}{\dfrac{x^2-x-1}{1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x^2-x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}...$

se foloseşte regula lui l'Hospital şi obţinem:

$...=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0.$

c) Ecuaţia asimptotei oblice este $y=mx+n$.

Calculăm m şi n:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2-x-1}{x+1}}{\dfrac{x}{1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-x-1)'}{(x^2+x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{2x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)'}{(2x+1)'}=1$

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1-x^2-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-1}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-2x-1)'}{(x+1)'}=-2$

Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ este $y=x-2$.

2.a) $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{e^x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=e^x,\forall x>0$

Primitivele funcţiei g sunt:

$\int g(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$

b) $\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)dx=\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot e^x\sqrt{x+1}dx=\int_1^2(x+1)\cdot e^x dx=...$

Se foloseşte metoda integrării prin părţi pentru integrale definite:

$$...=\int_1^2 (x+1)\left(e^x\right)' dx=(x+1)\left(e^x\right)\Big|_1^2-\int_1^2 (x+1)'\left(e^x\right)dx=3e^2-2e-\int_1^2 e^x dx=3e^2-2e-e^x\Big|_1^2=3e^2-2e-\left(e^2-e\right)=$$

$$=3e^2-2e-e^2+e=2e^2-e$$

c) $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot e^x\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1},\forall x>0$

$$Aria=\int_2^3 h(x)dx=\int_2^3\sqrt{x+1}dx=\int_2^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_2^3=\left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_2^3=\left.\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right|_2^3=\frac{16}{3}-2\sqrt{3}=\frac{2}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right).$$

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 6 = \log_3 3 + \log_3 2$	**2p**
	$1 + \log_3 2 = 1 + a$	**3p**
2.	$A(0,1) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 1$	**2p**
	$f(0) = m - 3$	**2p**
	$m = 4$	**1p**
3.	$\log_2 \frac{x+1}{x+3} = -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} = 2^{-1}$	**3p**
	$x = 1$	**1p**
	Verificarea condițiilor de existență	**1p**
4.	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numerele divizibile cu 7 sunt $7, 14, 21, 28 \Rightarrow 4$ cazuri favorabile	**2p**
	Mulțimea are 30 de elemente $\Rightarrow$ 30 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{2}{15}$	**1p**
5.	O este mijlocul segmentului $(AB) \Leftrightarrow x_B = 2x_O - x_A \Leftrightarrow x_B = -4$	**3p**
	$y_B = 2y_O - y_A \Leftrightarrow y_B = 1$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$	**3p**
	$\cos A = \frac{1}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -a^2 + 5a - 6$	**3p**
b)	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$	**2p**
	$-a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 3$	**2p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$	**1p**
c)	$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + y + 9z = 1 \end{cases}$	**2p**
	$x = 0,\ y = 1,\ z = 0$	**3p**
2.a)	$f(\hat{1}) = m + n$	**2p**

	$m+n=m \Leftrightarrow n=\hat{0}$	3p
b)	$f=X^5+\hat{4}X$	1p
	$f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(\hat{2})=f(\hat{3})=f(\hat{4})=\hat{0}$	3p
	Rădăcinile polinomului f sunt $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ și $\hat{4}$	1p
c)	$f(\hat{1})=m+n,\ f(\hat{2})=\hat{2}(m+n)$	1p
	$f(\hat{1})=f(\hat{2})\Rightarrow m+n=\hat{0}$	2p
	$f(\hat{3})=\hat{3}(m+n)=\hat{0},\ f(\hat{4})=\hat{4}(m+n)=\hat{0}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2}=$	3p
	$=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	3p
c)	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x}=1$	2p
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-1}{x+1}=-2$	2p
	$y=x-2$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$	1p
2.a)	$g(x)=e^x$	2p
	$\int g(x)dx=e^x+C$	3p
b)	$\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)dx=\int_1^2(x+1)\cdot e^x dx=$	1p
	$=(x+1)e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$	3p
	$=2e^2-e$	1p
c)	$h(x)=\sqrt{x+1}$	1p
	$A=\int_2^3\lvert h(x)\rvert dx=\int_2^3\sqrt{x+1}\,dx=\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big\vert_2^3=$	3p
	$=\dfrac{2}{3}(8-3\sqrt{3})$	1p