Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.
5p	**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.
5p	**4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că A este mijlocul segmentului (OB).
5p	**6.** Determinați măsura x a unui unghi ascuțit, știind că $\frac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

Soluții

Subiectul1

1. Folosim formula $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

$$2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$$

2. $\frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x<3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,3)$.

3. Punem condiții de existență $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow x\in[-2,+\infty)$.

Pentru rezolvare ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației:

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow x+2=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0$. Această din urmă ecuație are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=-2$. După verificare se obține că ambele soluții sunt bune.

4. Dobanda obținută este $D=1008lei-900lei=108lei$.

Mai departe avem:

$$\frac{p}{100}\cdot 900=108 \Rightarrow 9p=108 \Rightarrow p=\frac{108}{9}=12.$$

5. Fie $B(x_B,y_B)$.

Mijlocul segmentului OB este $A\left(\frac{0+x_B}{2},\frac{0+y_B}{2}\right)$.

Dar $A(2,3)$.

Rezultă că:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x_B}{2}=2\Rightarrow x_B=4\\ \frac{y_B}{2}=3\Rightarrow y_B=6\end{array}\right\}\Rightarrow B(4,6)$$

6. $\dfrac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5\Rightarrow \sin x+4\cos x=5\cos x\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow x=45^0$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul f se divide cu $X-1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

Subiectul 2

1.a) $\det H(x)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1,\forall x\in(0,+\infty)$.

b)

$H(x)\cdot H(a)=H(x),\forall x>0\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix},\forall x>0\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix},\forall x>0\Leftrightarrow$

$\ln a+\ln x=\ln x,\forall x>0\Leftrightarrow$

$\ln a=0\Leftrightarrow a=1$

c)

$$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln 1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln 2012\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln 2012\\0&0&2012\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln 2012!\\0&0&2012\end{pmatrix}$$

Determinantul acestei matrice este;

$$\begin{vmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln 2012!\\0&0&2012\end{vmatrix}=2012^3+0+0-0-0-0=2012^3.$$

2.a) Restul impărţirii polinomului f la $X-1$ este $r=f(1)=1^3+3\cdot 1^2-3\cdot 1-1=1+3-3-1=0$ de unde rezultă că f se divide cu $X-1$.

b) Scriem relaţiile lui Viete:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{1}=-3$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{-1}{1}=1$$

Se foloseşte formula $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ in care inlocuim pe a,b,c respectiv cu x_1,x_2,x_3.

Rezultă:

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\Rightarrow$$

$$(-3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(-3)\Rightarrow 9=x_1^2+x_2^2+x_3^2-6\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$$

c) Metoda 1:

$$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow$$

$$f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=2^3+3\cdot 2^2-3\cdot 2-1=8+12-6-1=13$$

Metoda 2:

$$(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=(4-2x_1-2x_2+x_1x_2)(2-x_3)=8-4(x_1+x_2+x_3)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=$$

$$=8-4(-3)+2(-3)-1=8+12-6-1=13$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.
5p	**a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției f.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a) $f'(x)=\left(\sqrt{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x},\forall x>0$`.

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

b) Facem tabelul cu monotonia funcției f. f este derivabilă pentru x>0.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{2x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$$

x	0		4		$+\infty$
f'(x)		- - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
f(x)		↘	f(4)	↗	

Din tabel rezultă că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)=0-(-\infty)=+\infty$ deci graficul funcţiei f are asimptotă verticală de ecuaţie x=0.

2.a) Funcţia F este derivabilă şi avem:

$$F'(x)=\left(xe^x-e^x+2012\right)'=\left(xe^x\right)'-\left(e^x\right)'=x'e^x+x\left(e^x\right)'-\left(e^x\right)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x=f(x),\forall x\in R$$

deci F este o primitivă a funcţiei f.

b)

$$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e \ln x\cdot e^{\ln x}dx=\int_1^e x\cdot\ln xdx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

c) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\frac{f^2(x)}{x^2}dx=\pi\int_1^2\frac{x^2e^{2x}}{x^2}dx=\pi\int_1^2 e^{2x}dx=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2=\pi\left(\frac{e^4}{2}-\frac{e^2}{2}\right)=\frac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}=0,75$	**2p**
2.	$\frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0$	**3p**
	$x\in(-\infty,3)$	**2p**
3.	Condiție: $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$	**1p**
	$x+2=x^2+4x+4$	**2p**
	$x_1=-2$ și $x_2=-1$	**2p**
4.	Dobânda obținută este $D=1008\text{ lei}-900\text{ lei}=108\text{ lei}$	**1p**
	$\frac{p}{100}\cdot 900=108$	**2p**
	$p=12$	**2p**
5.	$x_A=\frac{x_O+x_B}{2}$ și $y_A=\frac{y_O+y_B}{2}$	**3p**
	$x_B=4$ și $y_B=6$	**2p**
6.	$\sin x+4\cos x=5\cos x$	**1p**
	$\sin x=\cos x$	**2p**
	$x=45^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(H(x))=1+0+0-0-0-0$	**4p**
	Finalizare	**1p**
b)	$H(x)\cdot H(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\ln a=0\Rightarrow a=1$	**2p**

c)	$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(2012!) \\ 0 & 0 & 2012 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{vmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(2012!) \\ 0 & 0 & 2012 \end{vmatrix}=2012^3$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-3\cdot 1-1=0$	**3p**
	$f(1)=0\Rightarrow X-1 \mid f$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-3$	**1p**
	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$	**1p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$	**3p**
c)	$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$	**3p**
	$f(2)=13$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x},\ x>0$	**2p**
	f derivabilă în $x=4\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	f este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(4,+\infty)$ $\Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)=+\infty$	**3p**
	$x=0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f	**2p**
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=xe^x+e^x-e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F'=f$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**2p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=$	**2p**
	$=\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\frac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$	**1p**