Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.
5p	**2.** Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+1}=x+1$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.
5p	**5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Soluţii

Subiectul1

1. $x=2+2i-2i=2\in R$.

2.Observăm că $f(2)=2-2=0$ de unde rezultă că produsul cerut in exerciţiu este nul deoarece unul din factori este nul.

3.Se ridică la pătrat ambii membri:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(x+1)^2\Rightarrow x^2+1=x^2+2x+1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0.$$

Se observă faptul că soluţia găsită verifica ecuaţia dată.

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\dfrac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$.

Numerele de două cifre sunt 10,11,12,13,...,99.
Sunt 99-9=90 numere de două cifre deci sunt 90 de cazuri posibile.
Numerele de două cifre cu produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 şi 51 deci sunt două cazuri favorabile.

$$P=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}.$$

5.Se calculează vectorul $\overrightarrow{AC}$ după regula triunghiului.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{i}+\vec{j}=4\vec{i}+3\vec{j}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

6. $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

5p **a)** Calculaţi $2*2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{12}$.

5p **c)** Arătaţi că numărul $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1$.

b) $A^2-6A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 12\\ 18 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

c)Din relaţia demonstrată la punctul **b)** obţinem:

$\begin{matrix}A(A-6I_2)=I_2\\ (A-6I_2)A=I_2\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}A\cdot B=I_2\\ B\cdot A=I_2\end{cases}$. De aici deducem că $B^{-1}=A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

2.a) $2*2=\sqrt{2^2+2^2+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

b) $x*x=\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x^2+4}=\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+4}=\sqrt{12}\Leftrightarrow 2x^2+4=12\Leftrightarrow 2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$.

c)Legea de compoziţie dată este asociativă.

$1*1=\sqrt{1^2+1^2+4}=\sqrt{6}$

$1*1*1*1=(1*1)*(1*1)=\sqrt{6}*\sqrt{6}=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2+4}=4$

$1*1*1*1*1*1*1*1=(1*1*1*1)*(1*1*1*1)=4*4=\sqrt{4^2+4^2+4}=6\in Z$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1(x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x)\,dx+\int_0^1 x^3f(x)\,dx=\dfrac{1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

Subiectul 3

1.a) Se foloseşte regula de derivare a produsului de funcţii $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$$f'(x)=\left[e^x\left(x^2-6x+9\right)\right]'=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=$$
$$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right),\forall x\in R.$$

b)Se calculeaza derivata a doua:

$$f''(x)=\left[e^x\left(x^2-4x+3\right)\right]'=\left(e^x\right)'\left(x^2-4x+3\right)+e^x\left(x^2-4x+3\right)'=e^x\left(x^2-4x+3\right)+e^x(2x-4)=$$
$$=e^x\left(x^2-4x+3+2x-4\right)=e^x\left(x^2-2x-1\right),\forall x\in R$$
$$f(x)+f''(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-2x-1\right)=e^x\left(x^2-6x+9+x^2-2x-1\right)=e^x\left(2x^2-8x+8\right),\forall x\in R$$
$$2\left(f'(x)+e^x\right)=2\left(e^x\left(x^2-4x+3\right)+e^x\right)=2e^x\left(x^2-4x+4\right)=e^x\left(2x^2-8x+8\right),\forall x\in R$$

Din ultimele două egalităţi rezultă că $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right),\forall x\in R$.

c)Se rezolvă ecuaţia $f'(x)=0$.

$$\Rightarrow e^x\left(x^2-4x+3\right)=0$$

Ecuaţia $e^x=0$ nu are soluţii iar ecuaţia $x^2-4x+3=0$ are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=3$.

Tabelul cu monotonia funcţiei f este in felul următor:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	0	- - - - - - -	0	+ + + + + +	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Din tabelul de mai sus rezultă că funcţia f are un punct de maxim $x_1=1$ şi un punct de minim $x_2=3$.

2.a) $\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1(x+1)\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 x^2f(x)dx+\int_0^1 x^3f(x)dx=\int_0^1\left(x^2f(x)+x^3f(x)\right)dx=\int_0^1\left(x^2+x^3\right)f(x)dx=\int_0^1 x^2(x+1)\frac{x}{x+1}dx=$

$$=\int_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}.$$

c) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$

$$=\pi\left.\left(x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)\right|_0^1=\pi\left(1-2\ln 2-\frac{1}{2}+1\right)=\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right).$$