Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.
5p	**4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 2200 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\frac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

Soluţii

Subiectul1

1. $a=3(3-2i)+2(5+3i)=9-6i+10+6i=19\in R$.

2.

$f(1)=4\cdot1-1$

$f(2)=4\cdot2-1$

....

$f(10)=4\cdot10-1$

$$f(1)+f(2)+...+f(10)=4(1+2+...+10)-10=4\cdot\frac{10(10+1)}{2}-10=210.$$

S-a folosit mai sus formula $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

3.Se pun condiţii de existenţă:

$$\begin{cases}2x>0\\1+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>-1\end{cases}\Rightarrow x\in(0,+\infty).$$

Datorită injectivităţii funcţiei logaritmice ecuaţia dată devine:

$2x=1+x\Rightarrow x=1$ care se află in intervalul $(0,+\infty)$.

4.Notăm cu x preţul iniţial al produsului.

Se obţine ecuaţia $x+\frac{10}{100}\cdot x=2200\Rightarrow x+\frac{x}{10}=2200\Rightarrow10x+x=22000\Rightarrow11x=22000\Rightarrow x=2000$.

5.Vectorii daţi sunt coliniari dacă şi numai dacă $\frac{1}{2}=\frac{4}{a+1}$

$\Rightarrow a+1=8\Rightarrow a=7$.

6. $3\sin x+\cos x=4\sin x\Rightarrow\sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.
5p	**a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n,n^2)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.
	2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=4$, arătaţi că $f(4)=8$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.
5p	**c)** Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X-3$.

Subiectul 2

1.a) $D(2,3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 9 & 1\end{vmatrix}=4+18+3-12-9-2=2$.

b) Facem zerouri pe prima linie folosind proprietăţile determinanţilor.
Pentru aceasta scădem ultima coloană din primele două coloane şi obţinem:

$$D(a,b)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-1 & a^2-1 & 1\\ b-1 & b^2-1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-1 & a^2-1 & 1\\ b-1 & b^2-1 & 1\end{vmatrix}=(a-1)(b^2-1)-(b-1)(a^2-1)=$$

$$=(a-1)(b-1)(b+1)-(b-1)(a-1)(a+1)=(a-1)(b-1)\left[(b+1)-(a+1)\right]=(a-1)(b-1)(b-a),\forall a,b\in R$$

c) $P_1(1,1)$, $P_2(2,4)$, $P_n(n,n^2)$.

Aria triunghiului $P_1P_2P_n$ se calculează cu formula:

$Aria_{\Delta P_1P_2P_n}=\frac{1}{2}|\Delta|$ unde Δ este următorul determinant:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ n & n^2 & 1\end{vmatrix}=(2-1)(n-1)(n-2)=(n-1)(n-2)$$ (s-a folosit rezultatul obţinut la punctul b)

$\Rightarrow Aria_{\Delta P_1P_2P_n}=\frac{1}{2}(n-1)(n-2),n\geq 3$.

Se obţine următoarea ecuaţie: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=1$ care se rezolvă:

$(n-1)(n-2)=2\Rightarrow n^2-3n+2=2\Rightarrow n^2-3n=0\Rightarrow n(n-3)=0$ care are singura soluţie acceptabilă $n=3$.

2.a) $f(4)=4^3-4\cdot 4^2+3\cdot 4-4=12-4=8$.

b) Prima relaţie a lui Viete este:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4$$

Deoarece $x_1+x_2=x_3$ obţinem că $2x_3=4\Rightarrow x_3=2$.

Punem condiţia ca polinomul f să aibă rădăcina $x_3 = 2$ adică trebuie să avem $f(2) = 0$

$f(2) = 2^3 - 4\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - m = 0$

$\Rightarrow 8 - 16 + 6 - m = 0$

$\Rightarrow m = -2$

c)Scriem relaţiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} = 3 \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = m \end{cases}$$

Mai departe folosim formula:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$\Rightarrow 4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cdot 3$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$

x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f deci avem:

$x_1^3 - 4\cdot x_1^2 + 3\cdot x_1 - m = 0$

$x_2^3 - 4\cdot x_2^2 + 3\cdot x_2 - m = 0$

$x_3^3 - 4\cdot x_3^2 + 3\cdot x_3 - m = 0$

Se adună cele trei egalităţi membru cu membru:

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3m = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4\cdot 10 + 3\cdot 4 - 3m = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 28 + 3m$

Condiţia din enunţ devine:

$28 + 3m = 28 \Rightarrow m = 0$.

Mai departe avem:

$f = X^3 - 4X^2 + 3X$

$f(3) = 27 - 36 + 9 = 0$

de unde rezultă că polinomul f este divizibil cu $X - 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_1.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Arătaţi că $1\le (n+1)I_n \le e$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)'=-\sin x+x, \forall x\in R$.

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=\cos 0+0=1$

$f'(0)=-\sin 0+0=0$

Se obţine că ecuaţia tangentei este $y-1=0$

c) $f''(x)=(-\sin x+x)'=1-\cos x\ge 0, \forall x\in R$ de unde rezultă că funcţia f' este crescătoare pe **R**.

Deoarece $f'(0)=0$ deducem că $f'(x)\le 0, \forall x\le 0$ şi $f'(x)\ge 0, \forall x\ge 0$.

Rezultă că funcţia f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)\ge f(0)=1, \forall x\in R$.

2.a) Se foloseşte formula de integrare prin părţi pentru integrale definite;

$I_1=\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)' dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 x'e^x dx=e-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-(e-1)=1$.

b) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)' dx=x^{n+1}e^x\Big|_0^1-\int_0^1 (x^{n+1})' e^x dx=e-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=e-(n+1)I_n$

$I_{n+1}+(n+1)I_n=e, \forall n\in N$.

c)Pentru $\forall n\in N^*, \forall x\in[0,1]$avem $1\le e^x\le e$ şi $x^n\ge 0$de unde rezultă că

$x^n\le e^x x^n\le ex^n, \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx\le \int_0^1 e^x x^n dx\le \int_0^1 ex^n dx$

$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\le I_n\le e\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1}\le I_n\le \frac{e}{n+1}$

$\Rightarrow 1\le (n+1)I_n\le e, \forall n\in N^*$