http://variante-mate.ro

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+4=0\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Soluții

Subiectul1

1. Punem condiția ca ecuația $x^2+mx+4=0$ să aibă soluția x=2.
Obținem $4+2m+4=0\Rightarrow 2m=-8\Rightarrow m=-4$.
Observăm că pentru $m=-4$ ecuația $x^2+mx+4=0$ are $\Delta=0$ deci are o singură soluție și aceasta este x=2.In acest caz mulțimile A și B sunt egale.

2. Varful unei parabole este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$.

$\Delta=9-8=1$

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$.

Varful este $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

3.Punem condiția de existență pentru logaritm $x>0$.
Inecuația dată devine $3^{\log_3 x}<1\Leftrightarrow 3^{\log_3 x}<3^0\Leftrightarrow \log_3 x<0\Leftrightarrow \log_3 x<\log_3 1\Leftrightarrow x\in(0,1)$.
Am ținut cont că funcția exponențială de bază 3 este strict crescătoare și de asemenea funcția logaritmică de bază 3 este strict crescătoare.

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula:

$$P(E)=\frac{nr.\quad cazuri\quad favorabile}{nr.\quad total\quad cazuri\quad posibile}$$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,...,99 deci numărul de cazuri posibile este 99-9=90.
Cate numere naturale de două cifre impare avem?
Dacă $\overline{ab}$ este un număr de două cifre impare atunci a poate lua 5 valori (1,3,5,7,9) iar b de asemenea poate lua 5 valori.In concluzie se pot forma $5\cdot 5=25$ numere de două cifre impare.

http://variante-mate.ro

Deci sunt 25 de cazuri favorabile.

Probabilitatea cerută este $P=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$.

5. Vectorii daţi sunt coliniari dacă $\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}\Leftrightarrow a^2=6a-9\Leftrightarrow a^2-6a+9=0$ care are o singură soluţie $a=3$.

6. Se calculează inălţimea din A a triunghiului.Fie D mijlocul laturii BC.

$AD^2=AB^2-BD^2\Rightarrow AD^2=25-9=16\Rightarrow AD=4$.

Aria triunghiului este $S=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}=12$.

Obs:Aria triunghiului se mai putea calcula şi cu formula lui Heron $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde p este semiperimetrul tringhiului.

Mai departe se calculeaza raza cercului circumscris triunghiului cu formula $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$ unde a,b,c sunt laturile tringhiului iar S este aria.

Avem $R=\frac{5\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 12}=\frac{25}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(\pi))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

2. Pe mulţimea $G=(0,1)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

5p **b)** Arătaţi că orice element din mulţimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$\circ$”.

5p **c)** Demonstraţi că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Subiectul 2

1.a) $A(\pi)=\begin{pmatrix}\cos\pi&0&i\sin\pi\\0&1&0\\i\sin\pi&0&\cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$\det A(\pi)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$.

b)

$$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos y&0&i\sin y\\0&1&0\\i\sin y&0&\cos y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y&0&i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\0&1&0\\i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)&0&\cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}=$$

http://variante-mate.ro

$$=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}=A(x+y),\forall x,y\in R.$$

c) Formula de la punctul **b)** se poate generaliza adică avem $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=A(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

$$(A(x))^{2012}=\underbrace{A(x)\cdot A(x)\cdot\ldots\cdot A(x)}_{de2012oriA(x)}=A\left(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{de2012orix}\right)=A(2012x).$$

Ecuaţia data devine:

$$A(2012x)=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos 2012x & 0 & i\sin 2012x\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin 2012x & 0 & \cos 2012x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2012x=1\\ \sin 2012x=0\end{cases}\Rightarrow 2012x=2n\pi\Rightarrow x=\frac{n\pi}{1006},n\in Z$$

2.a) $x\circ\frac{1}{2}=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}=x,\forall x\in(0,1)$

$$\frac{1}{2}\circ x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}=x,\forall x\in(0,1)$$

Deci $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=x,\forall x\in(0,1)$ de unde rezultă că $e=\frac{1}{2}$ este element neutru.

b) Axioma de element simetrizabil este $x\circ x'=x'\circ x=e$.

In cazul nostru:

$$x\circ x'=\frac{x\cdot x'}{2x\cdot x'-x-x'+1}=x'\circ x$$

Obţinem $\dfrac{x\cdot x'}{2x\cdot x'-x-x'+1}=\dfrac{1}{2}$

Calculăm pe x' in funcţie de x.

$$\frac{x\cdot x'}{2x\cdot x'-x-x'+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x\cdot x'=2x\cdot x'-x-x'+1\Rightarrow x'=1-x\in(0,1).$$

In concluzie pentru orice $x\in(0,1)$ există $x'\in(0,1)$ astfel incat $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{2}$.

c) Trebuie să verificăm două lucruri:

- f este bijectivă;
- $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in G$.

Injectivitatea

Plecăm de la $f(x_1)=f(x_2),x_1,x_2\in G$ şi trebuie să demonstrăm că $x_1=x_2$.

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{x_1}-1=\frac{1}{x_2}-1\Rightarrow\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ rezultă că f este injectivă.

Surjectivitatea

Trebuie să verificăm că pentru orice $y\in R_+^*$ există $x\in G$ astfel incat $f(x)=y$.

Fie $y\in R_+^*$.

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{x}-1=y\Leftrightarrow\frac{1}{x}=y+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{y+1}\in(0,1)$ deci f este surjectivă.

Deoarece f este injectivă si surjectivă rezultă că f este bijectivă.

http://variante-mate.ro

Pentru verificarea egalităţii $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in G$ procedăm astfel:

$$f(x\circ y)=f\left(\frac{x\cdot y}{2x\cdot y-x-y+1}\right)=\frac{1}{\frac{x\cdot y}{2x\cdot y-x-y+1}}-1=\frac{2x\cdot y-x-y+1}{x\cdot y}-1=\frac{2x\cdot y-x-y+1-x\cdot y}{x\cdot y}=$$

$$=\frac{x\cdot y-x-y+1}{x\cdot y}=\frac{x\cdot y}{x\cdot y}-\frac{x}{x\cdot y}-\frac{y}{x\cdot y}+\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)=$$

$$=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in G$$

Rezultă că f este izomorfism.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul 3

1.a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Am folosit mai sus regula lui l'Hospital.

b) $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0,\forall x\in R$ deci f este convexa pe **R**.

c) $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2},\forall x>0.$

$$g'(x)=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\right)'=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'+e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\sqrt{x}\right)'}{2}=\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2}=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}},\forall x>0.$$

$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}\Rightarrow g'(x)>0,\forall x>0$ deci g este strict crescăroare pe $(0,+\infty)$.

2.a) $J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1.$

b) $$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)'\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-1^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{2}\frac{\left(1-0^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}.$$

c) $$J_{2n}-J_{2n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{2n}x-\sin^{2n+2}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

http://variante-mate.ro

Facem schimbarea de variabilă $\sin x = t$.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$x = \arcsin t \Rightarrow x'dx = (\arcsin t)' \, dt \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Mai departe avem:

$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} (1-t^2) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t^{2n} \sqrt{1-t^2} dt = I_{2n}$ pentru orice număr natural n.

http://variante-mate.ro

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x^2+mx+4=0$ are soluția $x=2 \Rightarrow m=-4$ Pentru $m=-4$ cele două mulțimi sunt egale	**3p** **2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$ $\Delta=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
3.	Condiție: $x>0$ $3^{\log_3 x}<3^0 \Leftrightarrow x<1$ $x\in(0,1)$	**2p** **2p** **1p**
4.	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere $\Rightarrow$ 25 de cazuri favorabile $\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ și $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p=\frac{5}{18}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$ $a^2-6a+9=0$ $a=3$	**2p** **2p** **1p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\det(A(\pi))=1$	**3p** **2p**

http://variante-mate.ro

b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\ 0 & 1 & 0\\ i(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**3p**
	$A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$	**2p**
	$A(2012x)=I_3 \Leftrightarrow \cos(2012x)=1$ și $\sin(2012x)=0$	**1p**
	$x=\frac{k\pi}{1006}, k\in\mathbb{Z}$	**2p**
2.a)	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$x\circ x'=\frac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\frac{x'x}{2x'x-x'-x+1}=x'\circ x$, pentru orice $x,x'\in G$	**1p**
	$x\circ x'=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x$	**3p**
	$x'\in(0,1)$	**1p**
c)	f este bijectivă	**2p**
	$f(x\circ y)=\frac{1}{x\circ y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice x real, deci f este convexă	**2p**
c)	$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$	**2p**
	$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}$	**2p**
	$g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**1p**

http://variante-mate.ro

2.a)	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$	**1p**
	$J_1 = -\cos t \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}$	**2p**
	$J_1 = 1$	**2p**
b)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$	**1p**
	$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\Big\|_0^1$	**3p**
	$I_1 = \frac{1}{3}$	**1p**
c)	$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx$	**2p**
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x = t$ obținem $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt = I_{2n}$	**3p**

http://variante-mate.ro