Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ și $a_9 = 22$. Calculați a_{14}.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x}=\frac{1}{4}$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=5$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

Soluții

Subiectul1

1. Se folosește formula termenului general al unei progresii aritmetice $a_n = a_1+(n-1)r$.

$$\begin{cases} a_4 = a_1+3r = 7 / \cdot(-1) \\ a_9 = a_1+8r = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1-3r=-7 \\ a_1+8r=22 \end{cases}$$

Se adună cele două ecuații:
$5r=15 \Rightarrow r=3$.
Inlocuim pe r in prima ecuație și obținem $a_1+9=7 \Rightarrow a_1=-2$.
In final $a_{14}=a_1+13r=-2+13\cdot 3=37$.

2. Se rezolvă ecuația $f(x)=g(x) \Rightarrow x-3=5-x \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$ care este abscisa punctului de intersecție.
Pentru a afla ordonata punctului de intersecție se calculează fie $f(4)$ fie $g(4)$.
$f(4)=4-3=1$ deci punctul de intersecție este $A(4,1)$.

3. $2^{3-x}=\frac{1}{4} \Rightarrow 2^{3-x}=2^{-2} \Rightarrow 3-x=-2 \Rightarrow x=5$.

4.Numărul tripletelor (a,b,c) cu a,b,c distincte din M este $A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=24$.

Din acestea trebuie să scoatem acele triplete care incep cu 0 deoarece nici un număr nu incepe cu 0.

Tripletele care incep cu 0 sunt in număr de $A_3^2=\frac{3!}{(3-2)!}=6$.

In final sunt $24-6=18$ numere naturale de trei cifre distincte cu elemente din mulțimea M.

5. Fie $C(a,b)$ simetricul punctului A față de B.

Punctul B este mijlocul segmentului AC deci avem $B\left(\frac{1+a}{2},\frac{2+b}{2}\right)$

Dar $B(3,0)$ și identificand coordonatele punctului B obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{1+a}{2}=3 \\ \dfrac{2+b}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases} \text{ deci avem } C(5,-2).$$

6. Se foloseşte teorema lui Pitagora generalizată (sau teorema cosinusului):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow BC^2 = 36+25-2\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 61-30 = 31 \Rightarrow BC=\sqrt{31}.$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-1$.

5p **a)** Arătați că $x*1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$.

Subiectul 2

1.a) Fie A matricea asociată sistemului.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a-2+1-2-1-a = -2a-4.$$

b) O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul ei este diferit de 0.

Matricea A este inversabilă dacă $-2a-4\neq 0 \Rightarrow a\neq -2 \Rightarrow a\in R\setminus\{-2\}$.

c) Pentru a=0 determinantul sistemului este $\det A=-4\neq 0$ deci sistemul este compatibil determinat.

Soluția sistemului se află cu formulele lui Cramer: $\begin{cases} x=\dfrac{d_1}{\det A} \\ y=\dfrac{d_2}{\det A} \\ z=\dfrac{d_3}{\det A} \end{cases}$.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-2+2-4-0-0=-4$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-4+0+2-2-0=-4$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+0+1-0-1-2=-4$$

Se obţine soluţia sistemului $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$.

2.a) $x*1=x+1-1=x, \forall x \in R$.

b)

$x*x=x+x-1=2x-1$

$x*x*x=(x*x)*x=(2x-1)*x=2x-1+x-1=3x-2$

Obţinem ecuaţia $3x-2=4 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$.

c) $C_n^1=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}=n$

$C_n^2=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)}=\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$

Inlocuind in relaţia dată in enunţ obţinem:

$n*\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}=14 \Rightarrow n+\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}-1=14 \Rightarrow 2n+(n-1)\cdot n=30 \Rightarrow n^2+n-30=0$ care are soluţiile $n_1=5$ şi $n_2=-6$.Dintre acestea convine doar numărul natural $n_1=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x$.

5p **a)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(0)=1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^{2012}-x^{2011}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)'=\dfrac{(x+1)'\cdot e^x-(x+1)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-xe^x}{(e^x)^2}=-\dfrac{x}{e^x}, \forall x\in(0,+\infty)$.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{-\dfrac{x}{e^x}}{\dfrac{x+1}{e^x}}=-\dfrac{x}{x+1}, \forall x\in(0,+\infty)$.

b) $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)'=-\dfrac{x}{e^x}<0, \forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) $g(x)=\dfrac{e^{2x}\cdot\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)^2}{x}=\dfrac{(x+1)^2}{x}=\dfrac{x^2+2x+1}{x},\forall x\in(0,+\infty)$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x+1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+2x+1\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+2)'}{(2x)'}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-m\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)'}{x'}=2$$

$y=x+2$ este ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei g către $+\infty$.

2.a) Mulţimea primitivelor funcţiei f este $\int f(x)dx=\int\left(x^{2012}+x^{2011}+x^2+x\right)dx=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$

Punem condiţia $F(0)=1$ şi avem $F(0)=c=1$ deci primitiva cerută este $F(x)=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1$.

b) $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^{2012}+x^{2011}+x^2+x}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^{2011}(x+1)+x(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{\left(x^{2011}+x\right)(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1\left(x^{2011}+x\right)dx=$

$=\left(\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1007}{2012}$.

c) $g(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x-x^{2012}-x^{2011}=x^2+x,\forall x\in[1,2]$

Volumul cerut se calculează astfel:

$$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^2+x\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left(\frac{2^5}{5}+2\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}\right)-\pi\left(\frac{1^5}{5}+2\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}\right)=\pi\left(\frac{32}{5}+8+\frac{8}{3}\right)-\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{192+240+80-6-15-10}{30}\right)=\frac{481\pi}{30}.$$

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_9 = a_4 + 5r \Rightarrow r = 3$	**2p**
	$a_{14} = a_9 + 5r = 37$	**3p**
2.	A este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g; $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 3 = 5 - x$	**1p**
	$x - 3 = 5 - x \Rightarrow x_A = 4$	**2p**
	$y_A = 1$	**2p**
3.	$2^{3-x} = 2^{-2}$	**2p**
	$3 - x = -2 \Rightarrow x = 5$	**3p**
4.	Numărul tripletelor (a,b,c), cu a, b, c distincte din M este A_4^3	**2p**
	Numărul tripletelor $(0,b,c)$, cu b, c distincte nenule din M este A_3^2	**2p**
	$A_4^3 - A_3^2 = 18$ numere	**1p**
5.	Fie C simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului (AC)	**1p**
	$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$	**2p**
	$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$	**2p**
	$BC = \sqrt{31}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2a - 4$	**3p**
b)	Matricea asociată sistemului este inversabilă $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$	**3p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	**2p**
c)	$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$	**2p**
	$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$	**3p**
2.a)	$x * 1 = x + 1 - 1 =$	**4p**
	$= x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**1p**
b)	$x * x = 2x - 1$	**2p**

	$(x*x)*x=3x-2$ $x=2$	2p 1p
c)	$C_n^1=n,\ C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $n^2+n-30=0$ Finalizare: $n=5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+1)'\cdot e^x-(x+1)\cdot(e^x)'}{e^{2x}}=-\dfrac{x}{e^x},\ \forall x\in(0,+\infty)$ Finalizare	3p 2p
b)	$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}\Rightarrow f'(x)<0$, oricare ar fi $x>0$ Finalizare	3p 2p
c)	$g(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$ $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=2$ $y=x+2$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției g	1p 1p 1p 2p
2.a)	$\int f(x)dx=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$ $F(x)=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+c$ și $F(0)=1\Rightarrow c=1$ $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\dfrac{x^{2013}}{2013}+\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1$	2p 2p 1p
b)	$\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx=\int\limits_0^1\left(x^{2011}+x\right)dx=$ $=\left(\dfrac{x^{2012}}{2012}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg\|_0^1=\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1007}{2012}$	2p 3p
c)	$g(x)=x^2+x$ $V=\pi\int\limits_1^2 g^2(x)dx=\pi\int\limits_1^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx=\pi\left(\dfrac{x^5}{5}+2\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg\|_1^2=$ $=\dfrac{481\pi}{30}$	1p 3p 1p