Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2} = 9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ şi $\sin C = \frac{4}{5}$.

Soluţii

Subiectul1

1.Se foloseşte formula termenului general al unei progresii geometrice $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Pentru $n = 4$ obţinem $b_4 = b_1 \cdot q^3 \Rightarrow 27 = q^3 \Rightarrow q = 3$.

2.Varful unei parabole este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

$\Delta = 36 - 32 = 4$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4} = -1$

$\Rightarrow V(3,-1)$.

3.Ecuaţia dată devine:

$3^{x+2} = \left(3^2\right)^{1-x} \Rightarrow 3^{x+2} = 3^{2-2x} \Rightarrow x + 2 = 2 - 2x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P = \frac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$.

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,...99.
In total sunt 99-9=90 numere naturale de două cifre deci sunt 90 de cazuri posibile.
Pătratele perfecte de două cifre sunt 16,25,36,49,64,81 deci sunt 6 cazuri favorabile.

$P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

5.Se calculează vectorul $\overrightarrow{AC}$ după regula triunghiului:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{i} - 5\vec{j} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$

6.Se foloseşte teorema sinusurilor:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{4}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{\sin A}\Rightarrow\sin A=\frac{5\cdot\frac{4}{5}}{4}=1\ .$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&0&m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+...+A(101))=-51^2\cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Calculaţi $3\circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x\text{ de }2013\text{ ori}}=5$.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{vmatrix}=0+0+0-0-0-1=-1$.

b) $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&0&m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\-m&0&0\\-m&0&-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2m&1&1-m\\m&m&m\\m-m^2&m&m-m^2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1-2m&1&1-m\\m&m&m\\m-m^2&m&m-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow m=1$

c)

$$A(1)+A(2)+...+A(101)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix}1&1&1\\101&0&0\\101&0&101\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}101&101&101\\1+2+...+101&0&0\\1+2+...+101&0&1+2+...+101\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}101&101&101\\\frac{101(101+1)}{2}&0&0\\\frac{101(101+1)}{2}&0&\frac{101(101+1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}101&101&101\\101\cdot 51&0&0\\101\cdot 51&0&101\cdot 51\end{pmatrix}$$

$$\det\left(A(1)+A(2)+...+A(101)\right)=\begin{vmatrix}101 & 101 & 101\\ 101\cdot 51 & 0 & 0\\ 101\cdot 51 & 0 & 101\cdot 51\end{vmatrix}=101^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 51 & 0 & 0\\ 51 & 0 & 51\end{vmatrix}=-101^3\cdot 51^2.$$

Obs:S-a folosit mai sus formula $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, n\in N$.

2.a) $3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=4$.

b) $x\circ y=xy-4x-4y+20=xy-4x-4y+16+4=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4, \forall x,y\in R$

c)

$x\circ x=(x-4)^2+4$

$x\circ x\circ x=(x-4)^3+4$

.....

$\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x de 2013 ori}=(x-4)^{2013}+4$

Rezultă ecuaţia $(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow(x-4)^{2013}=1\Rightarrow x-4=1\Rightarrow x=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_0.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural n.
5p	**c)** Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul 3

1.a)

$$f'(x)=\frac{(e^x)'\cdot(x+e^x)-(e^x)\cdot(x+e^x)'}{(x+e^x)^2}=\frac{(e^x)\cdot(x+e^x)-(e^x)\cdot(1+e^x)}{(x+e^x)^2}=\frac{xe^x+e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(x+e^x)^2}=\frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}, \forall x\in(0,+\infty)$$

b)Căutăm asimptotă orizontală spre $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x+e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(1+e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

deci graficul are asimptotă orizontală către $+\infty$ dreapta de ecuaţie $y=1$.

Obs:Dacă graficul are asimptotă orizontală către $+\infty$ atunci nu are asimptotă oblică către $+\infty$.

Obs:Pentru calculul limitei s-a folosit regula lui l'Hospital.

c)Rezolvăm ecuaţia $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}=0 \Rightarrow (x-1)e^x=0 \Rightarrow x=1$

Tabelul de variaţie al funcţie f este in felul următor:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - -	0	+ + + + + + +	
$f(x)$		↘	$f(1)$	↗	

Din tabel rezultă că $f(x) \geq f(1)=\frac{e}{1+e}, \forall x \in (0,+\infty)$.

2.a) $I_0=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$.

b)

$(n+1)x^2 \geq nx^2, \forall n \in N, \forall x \in [0,1]$

$-(n+1)x^2 \leq -nx^2, \forall n \in N, \forall x \in [0,1]$

$e^{-(n+1)x^2} \leq e^{-nx^2}, \forall n \in N, \forall x \in [0,1]$

$xe^{-(n+1)x^2} \leq xe^{-nx^2}, \forall n \in N, \forall x \in [0,1]$

$\int_0^1 xe^{-(n+1)x^2}dx \leq \int_0^1 xe^{-nx^2}dx, \forall n \in N$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in N$

c)

$I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2n}\int_0^1(-2nx)e^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2n}\int_0^1(-nx^2)'e^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2n}\left.e^{-nx^2}\right|_0^1=-\frac{1}{2n}(e^{-n}-1)=$

$=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$

Obs:S-a folosit mai sus formula $\int_a^b e^{u(x)}u'(x)dx=\left.e^{u(x)}\right|_a^b$