Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.
5p	**2.** Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4}=5^{4x}$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 şi 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ şi $C(4,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

Soluţii

Subiectul1

1. $3(2+4i)+2(1-6i)=6+12i+2-12i=8$.

2. $\Delta=4-4=0$ de unde rezultă că parabola este tangentă la axa Ox.

3.

$x^2+4=4x$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\Rightarrow x=2$

4. $A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{24}{2}=12$.

5.Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-2)}{4-(-4)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1\Rightarrow m_d=-2$

Ecuaţia dreptei d este dată de formula $y-y_0=m(x-x_0)$

In cazul nostru avem:

$y-2=-2(x-(-2))$

$y-2=-2x-4$

$d:2x+y+2=0$

6.

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale p şi q ştiind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculaţi $f(0)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătaţi că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

b)

$$A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{n+1} & 0\\ 0 & 2^{n+1}-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A(n)\cdot A(1)=A(3)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{n+1} & 0\\ 0 & 2^{n+1}-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2^{n+1}=8\Rightarrow n+1=3\Rightarrow n=2$

c)

$$A(p)\cdot A(q)=A(pq)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^p & 0\\ 0 & 2^p-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^q & 0\\ 0 & 2^q-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{pq} & 0\\ 0 & 2^{pq}-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{p+q} & 0\\ 0 & 2^{p+q}-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{pq} & 0\\ 0 & 2^{pq}-1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow p+q=pq$$

$\Rightarrow(p-1)(q-1)=1$

$p-1$ şi $q-1$ sunt numere intregi care inmulţite dau 1.

Pot fi doar două cazuri

$$\begin{cases}p-1=1\\ q-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=2\\ q=2\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases}p-1=-1\\ q-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=0\\ q=0\end{cases}$$

2.a) $f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=2$

b)
$$\begin{array}{l|l} X^3+X^2-3X+2 & X^2-4 \\ \hline -X^3 \qquad +4X & X+1 \\ \hline \quad X^2+X+2 & \\ \quad -X^2 \qquad +4 & \\ \hline \qquad X+6 & \end{array}$$

Catul este $X+1$ iar restul este $X+6$.

c)Scriem relatiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=-1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}=-3 \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=-2 \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(-1)^2-2(-3)=1+6=7$$

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+x_3^2-2x_3x_1+x_1^2=$$

$$=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2\cdot 7-2(-3)=14+6=20$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\dfrac{1}{4}$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
5p	**c)** Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\dfrac{1}{4}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=(3x+e^x)'=(3x)'+(e^x)'=3+e^x, \forall x\in R$

b)Ecuaţia asimptotei oblice este $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x+e^x)'}{x'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+e^x}{1}=\frac{3+e^{-\infty}}{1}=3+0=3$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}(3x+e^x-3x)=\lim_{x\to-\infty}e^x=e^{-\infty}=0$$

Ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei f este $y=3x$.

c)Considerăm funcţia ajutătoare $g:R\to R$ prin formula $g(x)=f(x)-4x-1$

$g(x)=3x+e^x-4x-1=e^x-x-1, x\in R$

$g'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1$

$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$

Tabelul de variaţie al funcţiei g este

x	$-\infty$						0						$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$		↘					0				↗		

Din tabel rezultă că $g(x)\geq 0, \forall x\in R$

$g(x)=f(x)-4x-1\geq 0, \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)\geq 4x+1, \forall x\in R$

2.a) $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)\frac{x^3}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}.$

b) $\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{x^2+x+1}-x+1\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^3-x^3-x^2-x+x^2+x+1}{x^2+x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=$

$$=\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\left.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(arctg\sqrt{3}-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Obs:S-a folosit mai sus formula $\int\frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{u(x)}{a}+C$

c) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\int_0^t f(x)dx}{t^4}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\left(\int_0^t f(x)dx\right)'}{\left(t^4\right)'}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{4t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{4\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}.$

Obs:S-a aplicat mai sus regula lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcţii de tipul $\frac{0}{0}$.