Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 9

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $3\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}=3$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Arătaţi că $f(-3)+f(3)=6$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+3)^2-x^2-15=0$
5p	**4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 220 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,3)$ şi $R(4,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului PR.
5p	**6.** Determinaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, ştiind că $BC=20$ şi $\cos B=\frac{2}{5}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $3\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}=3+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3$

2. $f(-3)=-3+3=0$

$f(3)=3+3=6$

$f(-3)+f(3)=0+6=6$

3.Ecuaţia dată devine:

$x^2+6x+9-x^2-15=0$

$6x-6=0$

$x=1$

4.Notăm cu x preţul produsului inainte de scumpire.

Scumpirea este de $\frac{10}{100}x=\frac{x}{10}$

Se obţine ecuaţia:

$x+\frac{x}{10}=220$

$10x+x=2200$

$11x=2200$

$x=\frac{2200}{11}=200$

5.Mijlocul unui segment are coordonatele $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{2+4}{2},\frac{3+3}{2}\right)\Rightarrow M(3,3)$

6. $\cos B=\frac{catetaalaturata}{ipotenuza}=\frac{AB}{BC}$

$\frac{2}{5}=\frac{AB}{20}\Rightarrow AB=\frac{20\cdot 2}{5}=8$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **1.** Calculaţi $3\circ(-2)$.

5p **2.** Verificaţi dacă legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

5p **3.** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **4.** Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.

5p **5.** Verificaţi dacă $x\circ(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **6.** Calculaţi $(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-2)$.

Subiectul 2

1. $3\circ(-2)=3\cdot(-2)+2\cdot 3+2\cdot(-2)+2=-6+6-4+2=-2$

2. $x\circ y=xy+2x+2y+2$

$y\circ x=yx+2y+2x+2$

$\Rightarrow x\circ y=y\circ x,\forall x,y\in R$

deci legea de compoziţie dată este comutativă.

3. $(x+2)(y+2)-2=xy+2x+2y+4-2=xy+2x+2y+2,\forall x,y\in R$

$\Rightarrow x\circ y=(x+2)(y+2)-2,\forall x,y\in R$

4. $x\circ x=x^2+4x+2$

Se obţine ecuaţia $x^2+4x+2=x$

$x^2+3x+2=0$ care are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=-2$.

5. $x\circ(-2)=x\cdot(-2)+2x+2\cdot(-2)+2=-2x+2x-4+2=-2,\forall x\in R$

6. $\underbrace{(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-3)}_{x}\circ(-2)=x\circ(-2)=-2$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&m\end{pmatrix}$.

5p **1.** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **2.** Arătaţi că $\det(A(m))=5m-4$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det(A(m))=m^2$.

5p **4.** Arătaţi că $A(m)+A(-m)=2A(0)$ pentru orice număr real m.

5p **5.** Verificaţi dacă $A(0)\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-2\\-7&3&5\end{pmatrix}=-4I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **6.** Pentru $m=0$, rezolvaţi sistemul $\begin{cases}x+2y+z=2\\-x+3y+z=3\\2x+y+mz=1\end{cases}$.

Subiectul 3

1. $\det A(0)=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{vmatrix}=0-1+4-6-1+0=-4$

2. $\det A(m)=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&m\end{vmatrix}=3m-1+4-6-1+2m=5m-4,\forall m\in R$

3.Se obţine ecuaţia $5m-4=m^2$

$m^2-5m+4=0$ care are soluţiile $m_1=1$ şi $m_2=4$.

4. $A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&2\\-2&6&2\\4&2&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{pmatrix}=2A(0),\forall m\in R$

5. $A(0)\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-2\\-7&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-2\\-7&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-4I_3$

6.Sistemul devine: $\begin{cases}x+2y+z=2\\-x+3y+z=3\\2x+y=1\end{cases}$

Matricea asociată sistemului este $A(0)$.

Determinantul matricei associate sistemului este $\det A(0)=-4\neq 0$ deci sistemul este compatibil determinat(are soluţie unică).

Pentru rezolvare se folosesc formulele lui Cramer:

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1}{\det A(0)} \\ y = \dfrac{d_2}{\det A(0)} \\ z = \dfrac{d_3}{\det A(0)} \end{cases}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 2 - 3 - 2 - 0 = 0$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \text{ este calculat deja.}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ deoarece are două coloane egale.}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{0}{-4} = 0 \\ y = \dfrac{-4}{-4} = 1 \\ z = \dfrac{0}{-4} = 0 \end{cases}$$