Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+x+1\right)=\log_5(x+2)$.
5p	**4.** După o ieftinire cu 10% preţul unui produs este 90 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de ieftinire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuaţie $y=x-1$ şi punctul $A(2,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.
5p	**6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ şi $BC=7$.

Soluţii

Subiectul1

1. $a=3(2+5i)-5(1+3i)=6+15i-5-15i=1\in R$

2. Abscisele punctelor de intersecţie dintre graficul unei funcţii şi axa Ox se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=0$.

In cazul nostru avem:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+10x+25=0$

$\Delta=100-100=0$

$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{10}{2}=-5$

In concluzie , graficul intersectează axa Ox intr-un singur punct $A(-5,0)$

Obs:

-Graficul este tangent la axa Ox in punctul A;

-Ecuaţia $f(x)=0$ se putea rezolva şi astfel $x^2+10x+25=0\Rightarrow(x+5)^2=0\Rightarrow x=-5$.

3. Se pun condiţii de existenţă:

$$\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in R \\ x>-2 \end{cases}\Rightarrow x\in(-2,+\infty)$$

Pentru rezolvare avem:

$x^2+x+1=x+2\Rightarrow x^2=1$ care are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=1$.

Ambele soluţii obţinute sunt in intervalul $(-2,+\infty)$ şi verifică ecuaţia dată.

4. Notăm cu x preţul produsului inainte de ieftinire.

Se obţine ecuaţia $x-\frac{10}{100}x=90\Rightarrow x-\frac{x}{10}=90\Rightarrow 10x-x=900\Rightarrow 9x=900\Rightarrow x=100$.

5. Două drepte sunt paralele d.n.d. au aceeaşi pantă(exceptand cazul cand sunt amandouă paralele cu Oy şi atunci nu au pantă).

Stim că dacă ecuaţia unei drepte este scrisă sub forma $y = mx + n$ atunci coeficientul lui x ,adică m, este chiar panta dreptei.Rezultă că $m_h = 1$.

$m_d = m_h = 1$.

Ecuaţia dreptei d se află cu formula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$y - 2 = 1(x - 2)$

$d : y = x$

6. $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(2) + A(6) = 2A(4)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătaţi că f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m ştiind că $|x_1| = |x_2| = |x_3|$.

Subiectul 2

1.a) $A(2) + A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2A(4)$.

b) $\det(A(x)) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 0 + 1 - 0 + 1 - x = 0 \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$.

c)Etapa 1:Se calculează determinantul matricei $A(2)$.

$\det(A(2)) = 3 - 2 = 1 \neq 0$ deci matricea $A(2)$ are inversă.

Etapa 2:Se scrie matricea transpusă:

$${}^{t}A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etapa 3:Se calculează matricea adjunctă $A(2)^*$

$$A(2)^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

Fiecare element se calculează cu formula $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ unde d_{ij} este un determinant de ordinul 2 care se obţine tăind linia i şi coloana j in matricea transpusă scrisă la etapa a doua.

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot d_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot d_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot d_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot d_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot d_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot d_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3$$

$$\delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot d_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot d_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$$

$$\Rightarrow A(2)^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Etapa 4:Se calculează matricea inversă cu formula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Se obţine $A(2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Obs: Se poate face verificarea astfel $A(2) \cdot A(2)^{-1} = A(2)^{-1} \cdot A(2) = I_3$.

2.a) Metoda 1:

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + m(-1) + m = -1+1-m+m = 0$$

$$\Rightarrow f \vdots X+1$$

Metoda 2:

$$f = X^2(X+1) + m(X+1) = (X+1)(X^2+m)$$

$$\Rightarrow f \vdots X+1$$

b)Scriem primele două relaţii ale lui Viete:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = m$$

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$(-1)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2m$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$

$\Rightarrow 1-2m=11$

$\Rightarrow -2m=10$

$\Rightarrow m=-5$

c)Conform punctului a) avem $x_1=-1 \Rightarrow |x_2|=|x_3|=1$.

A treia relaţie a lui Viete este $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-m$

$\Rightarrow |x_1x_2x_3|=|m|=1$

$\Rightarrow m=\pm 1$

Pentru $m=1$ avem $x_1=-1, x_2=-i, x_3=i$

Pentru $m=-1$ avem $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$

In amandouă cazurile avem $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$ deci ambele valori ale lui m sunt bune.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $x\geq \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(1)=-1$.
5p	**c)** Arătaţi că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}, \forall x\in(0,+\infty)$.

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de ecuaţia

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Rezultă $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$f(1)=1-\ln 1=1$

$f'(1)=1-\frac{1}{1}=0$

$\Rightarrow y-1=0$ este ecuaţia tangentei cerute.

c)Facem tabelul de monotonie al funcţiei f.

$f'(x)=0\Rightarrow \frac{x-1}{x}=0\Rightarrow x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Din tabelul de mai sus rezultă că $f(x) \geq 1, \forall x \in (0,+\infty)$.

$\Rightarrow x - \ln x \geq 1, \forall x \in (0,+\infty)$

$\Rightarrow x \geq \ln x + 1, \forall x \in (0,+\infty)$

2.a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx = \int_2^3 \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}dx = \int_2^3 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{3^2}{2}+3\right) - \left(\frac{2^2}{2}+2\right) = \frac{9}{2}+3-\frac{4}{2}-2 = \frac{7}{2}$.

b)Mulţimea primitivelor funcţiei f este

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$$

O primitivă oarecare este $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c \quad , \quad c \in R$.

$$F(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + c = -1$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

Primitiva căutată este $F : R \to R \quad , \quad F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}$

c)Se foloseşte formula de integrare prin părţi pentru integrale definite.

$$\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx = \int_2^e \frac{x(x-1)(x+1)\ln x}{x^2-1}dx = \int_2^e x\ln x dx = \int_2^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_2^e - \int_2^e \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{2^2}{2}\ln 2 - \int_2^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Bigg|_2^e = \frac{e^2}{2} - 2\ln 2 - \frac{e^2}{4} + 1 = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1.$$