Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + 3i$. Calculați z^2.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9\left(x^2+5\right) = 1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Se consideră $E(x) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţii

Subiectul1

1. $z^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

2.Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$.

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 0$

$x_1 = x_2 = 3$

Graficul funcţiei este o parabolă tangentă la axa Ox in punctul $A(3,0)$.

3.Condiţie de existenţă $x \in R$.

Pentru rezolvare folosim echivalenţa $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Ecuaţia dată devine:

$x^2 + 5 = 9$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

4. $P = \dfrac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,...,99.
In total sunt 99-9=90 numere naturale de două cifre.
Dintre acestea sunt divizibile cu 13 numerele 13,26,39,52,65,78,91 deci sunt 7 cazuri favorabile.

$P = \dfrac{7}{90}$.

5.Metoda 1

$$Aria=\frac{1}{2}|\Delta| \text{ unde } \Delta=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=0+6+0-0+6-0=12$$

$$Aria=\frac{1}{2}|12|=6$$

Metoda 2

$AB=4, CO=3, CO\perp AB$

$$Aria=\frac{baza\cdot inaltimea}{2}=\frac{AB\cdot OC}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$$

6. $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=0+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(1))$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $\det(A(a))=1$.
5p	**c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.
5p	**a)** Calculaţi $1\circ 2$.
5p	**b)** Arătaţi că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=2$.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot 0=6$.

b) $\det(A(a))=\begin{vmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{vmatrix}=4a+2-1+a=5a+1$

Se obţine ecuaţia

$5a+1=1$

$5a=0$

$a=0$

c) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Pentru calculul inversei unei matrice se parcurg următoarele etape:

Etapa 1.Se calculează determinantul acelei matrice

$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=1\neq 0$ deci matricea $A(0)$ are inversă.

Etapa 2.Se scrie matricea transpusă(se transformă liniile in coloane)

${}^{t}A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Etapa 3.Se calculează matricea adjunctă

$A(0)^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$

$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d_{11} = 1 \cdot 2 = 2$

$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot d_{12} = -1 \cdot 1 = -1$

$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot d_{21} = -1 \cdot 1 = -1$

$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot d_{22} = 1 \cdot 1 = 1$

Se obţine $A(0)^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Obs: $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ unde d_{ij} se obţine tăind linia i şi coloana j in matricea transpusă scrisă la etapa a 2-a.

Etapa 4.Se calculează matricea inversă cu formula $(A(0))^{-1} = \frac{1}{\det(A(0))} \cdot A(0)^*$.

$\Rightarrow (A(0))^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.a) $1 \circ 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 = 4 - 3 - 6 + 6 = 1$.

b) $2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} = 2xy - 3x - 3y + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 2xy - 3x - 3y + 6 = x \circ y, \forall x, y \in R$

c) $x \circ x = 2 \cdot x \cdot x - 3 \cdot x - 3 \cdot x + 6 = 2x^2 - 6x + 6$

Se obţine ecuaţia:

$2x^2 - 6x + 6 = 2$

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1$ şi soluţiile sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-\infty, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$.
5p	**a)** Calculaţi $\lim_{x \to 1} f(x)$.
5p	**b)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x \in (-\infty, 2)$.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x) \le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2 (x+1) f(x) dx = 2\ln 2 - 1$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x) + (x+1) f'(x)\right) dx = 1$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.

Subiectul 3

1.a) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{x-2}=\frac{e^{-1}}{1-2}=-\frac{1}{e}$.

b) Se foloseşte regula de derivare a unei fracţii $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x-2}\right)'=\frac{\left(e^{-x}\right)'\cdot(x-2)-\left(e^{-x}\right)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{-e^{-x}\cdot(x-2)-e^{-x}}{(x-2)^2}=\frac{e^{-x}(-x+2-1)}{(x-2)^2}=\frac{e^{-x}(1-x)}{(x-2)^2},\forall x\in(-\infty,2)$$

c) Se face tabelul cu monotonia funcţiei f.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{e^{-x}(1-x)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow e^{-x}(1-x)=0\Rightarrow x=1.$$

$$f(1)=-\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		2
$f'(x)$	+ + + + + + +	+	0	- - - - - - - - - - -	
$f(x)$	$\nearrow$		$-\frac{1}{e}$	$\searrow$	

Din tabel rezultă că $f(x)\le -\frac{1}{e},\forall x\in(-\infty,2)$

2.a) $\int_1^2 (x+1)f(x)dx=\int_1^2(x+1)\cdot\frac{\ln x}{x+1}dx=\int_1^2\ln x dx=\int_1^2 x'\ln x dx=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x(\ln x)'dx=$

$=2\ln 2-1\ln 1-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\int_1^2 1dx=2\ln 2-x\Big|_1^2=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$.

Obs: S-a folosit mai sus metoda de integrare prin părţi pentru integrale definite.

b $\int_1^e\left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=\int_1^e\left((x+1)'f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=\int_1^e\left[(x+1)f(x)\right]'dx=(x+1)f(x)\Big|_1^e=\ln x\Big|_1^e=$

$=\ln e-ln1=1-0=1$

c) $V=\pi\int_2^3 g^2(x)dx=\pi\int_2^3\left(\frac{\ln x}{f(x)}\right)^2dx=\pi\int_2^3\left(\frac{\ln x}{\frac{\ln x}{x+1}}\right)^2dx=\pi\int_2^3(x+1)^2dx=\pi\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_2^3=\pi\left(\frac{64}{3}-\frac{27}{3}\right)=\frac{37\pi}{3}$