Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6$.
5p	**2.** Calculaţi $f(-2)\cdot f(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2+1\right)=\log_3 1$.
5p	**4.** Preţul unui obiect este 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o ieftinire cu 10%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,1)$ şi $R(2,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului PR.
5p	**6.** Calculaţi $\cos B$, ştiind că $\sin B=\frac{5}{13}$ şi unghiul B este ascuţit.

Soluţii

Subiectul1

1. $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6$.

2. $f(-2)=-2+1=-1$

$f(0)=0+1=1$

$f(-2)\cdot f(0)=-1\cdot 1=-1$.

3. $x^2+1=1$

$x^2=0$

$\Rightarrow x=0$

4. Ieftinirea obiectului este $\frac{10}{100}\cdot 1000=100$ lei.

Preţul obiectului după ieftinire este $1000-100=900$ lei.

5. Fie M mijlocul segmentului PR.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{2+2}{2},\frac{1+3}{2}\right)\Rightarrow M(2,2)$.

6. $\sin^2 B+\cos^2 B=1\Rightarrow\left(\frac{5}{13}\right)^2+\cos^2 B=1$

$\frac{25}{169}+\cos^2 B=1$

$\cos^2 B=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$

$\cos B=\pm\sqrt{\frac{144}{169}}=\pm\frac{12}{13}$

Deoarece unghiul B este ascuţit rezultă $\cos B > 0$ deci $\cos B = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A \cdot A - xI_2 = A$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi matricele $M = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$, ştiind că $\det(M + A) = 0$, unde m este număr real.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x * y = x + y - 2$.

5p **a)** Calculaţi $5 * (-5)$.

5p **b)** Arătaţi că legea de compoziţie „$*$" este comutativă.

5p **c)** Calculaţi $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$.

Subiectul 2

1.a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$.

b) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$

$A \cdot A - xI_2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2-x=1 \\ 1-x=0 \end{cases}$ de unde rezultă $x = 1$.

c) $M + A = \begin{pmatrix} m & m \\ m & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M + A) = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = m+1-(m+1)^2 = m+1-m^2-2m-1 = -m^2-m$

$-m^2 - m = 0$

$m^2 + m = 0$

$m(m+1) = 0$

Rezultă $m = 0$ sau $m = -1$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.a) $5 * (-5) = 5 - 5 - 2 = -2$.

b) $x * y = x + y - 2, \forall x, y \in R$

$y * x = y + x - 2, \forall x, y \in R$

$x * y = y * x, \forall x, y \in R$ deci legea de compoziţie dată este comutativă.

c) Folosind comutativitatea demonstrată sus rezultă că

$(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3 = ((-3)*3)*((-2)*2)*((-1)*1)*0 = (-2)*(-2)*(-2)*0 = (-6)*(-2)*0 =$

$= (-10)*0 = -12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p	**c)** Arătaţi că funcţia f are un punct de extrem.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_4^5 xf(x)\,dx$.
5p	**b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>5$, pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=5$ şi $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(xe^x\right)'=x'\cdot e^x+x\left(e^x\right)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x,\forall x\in R$.

b) $f''(x)=\left[(x+1)e^x\right]'=(x+1)'e^x+(x+1)\left(e^x\right)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x,\forall x\in R$

$f''(x)+f(x)=(x+2)e^x+xe^x=(2x+2)e^x=2(x+1)e^x=2f'(x),\forall x\in R$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow(x+1)e^x=0\Rightarrow x=-1$.

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x		-1	
f'(x)	- - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +
f(x)	$\searrow$	f(-1)	$\nearrow$

Din tabel rezultă că funcţia f are un punct de minim $x=-1$.

2.a) $\int_4^5 xf(x)\,dx=\int_4^5 x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int_4^5 1\,dx=x\Big|_4^5=5-4=1$.

b) Funcţia F este derivabilă pe $(0,+\infty)$.

$F'(x)=(4+\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$ deci F este o primitivă a funcţiei f.

c) $Aria=\int_5^a\left|f(x)\right|dx=\int_5^a\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_5^a=\ln a-\ln 5=\ln\frac{a}{5}$

$\Rightarrow\ln\frac{a}{5}=\ln 3\Rightarrow\frac{a}{5}=3\Rightarrow a=15$.