Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.
5p	**2.** Determinați numărul real m știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+1}=1$.
5p	**4.** În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
5p	**6.** Arătați că $\operatorname{tg}^2 60^\circ+\operatorname{tg}^2 45^\circ=4$.

Soluții

Subiectul1

1. $3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{3}=1$

2. $f(m)=m-4$

$m-4=1$

$m=5$

3.Condiţie de existenţă $x\in R$.
Pentru rezolvare se ridică la pătrat ambii membri ai ecuaţiei:

$\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2=1^2$

$2x^2+1=1$

$2x^2=0$

$x^2=0$

$x=0$

Soluţia obţinută verifică ecuaţia dată.

4.Notăm cu x valoarea veniturilor anuale ale firmei in anul 2013.

$\frac{4}{100}\cdot x=100000$

$\frac{x}{25}=100000$

$x=2500000$

5.Se calculează cele trei laturi cu formula $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(2-5)^2+(6-6)^2}=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

$AC=\sqrt{(5-5)^2+(2-6)^2}=\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4$

$BC=\sqrt{(5-2)^2+(2-6)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$$\begin{cases} AB=3 \\ AC=4 \\ BC=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB^2=9 \\ AC^2=16 \\ BC^2=25 \end{cases} \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$$

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic cu $m(A)=90^0$.

6. $tg60^0=\sqrt{3}$

$tg45^0=1$

$tg^2 60^0+tg^2 45^0=\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2=3+1=4$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x ştiind că $A\cdot A-xA=I_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2(x+y-1)-xy$.

5p **a)** Arătaţi că $1*2=2$.

5p **b)** Arătaţi că $x*2=2*x=2$ pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=x$.

<u>**Subiectul 2**</u>

1.a) $\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=-6+5=-1$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$

$2A\cdot B-B\cdot A=2I_2-I_2=I_2$

c) $A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

$x\cdot A=x\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x & x \\ -5x & -2x \end{pmatrix}$

$A\cdot A-x\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3x & x \\ -5x & -2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-3x & 1-x \\ -5+5x & -1+2x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix} 4-3x & 1-x \\ -5+5x & -1+2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=1$

2.a) $1*2=2(1+2-1)-1\cdot 2=4-2=2$.

b) $x*2=2(x+2-1)-x\cdot 2=2x+4-2-2x=2, \forall x\in R$

$2*x=2(2+x-1)-2\cdot x=4+2x-2-2x=2, \forall x\in R$

$\Rightarrow x*2=2*x=2, \forall x\in R$.

c) $x*x=2(x+x-1)-x\cdot x=4x-2-x^2$

Se obţine ecuaţia $4x-2-x^2=x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$\Delta=9-8=1$

$x_1=1$

$x_2=2$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.
5p	**b)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real x.
5p	**c)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=0$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2 3x^2dx=7$.
5p	**b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=2014$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$ știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x}dx=\frac{13}{2}$.

Subiectul 3

1.a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x=(0-1)e^0=-1\cdot 1=-1$.

b) $f'(x)=\left[(x-1)e^x\right]'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=e^x+f(x), \forall x\in R$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[(x-1)e^x+1\right]'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+(x-1)e^x}{1}=e^0+(0-1)e^0=1-1=0$

Obs: In calculul de mai sus s-a aplicat regula lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcţii de tipul $\frac{0}{0}$.

2.a) $\int_1^2 3x^2dx=3\int_1^2 x^2dx=3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=x^3\Big|_1^2=2^3-1^3=8-1=7$.

b) Mulţimea primitivelor funcţiei f este integrala nedefinită a acesteia.

$\int f(x)dx=\int\left(3x^2+2x\right)dx=3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+C=x^3+x^2+C$

O primitivă oarecare este $F:R\to R$, $F(x)=x^3+x^2+c$ unde $c\in R$.

In cazul nostru $c\in R$ trebuie aflat din condiţia $F(1)=2014$.

$F(1)=1^3+1^2+c=2+c=2014$

$\Rightarrow c=2012$

Primitiva căutată este $F:R\to R$, $F(x)=x^3+x^2+2012$.

c) $\int_1^n \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^n \frac{3x^2+2x}{x}dx=\int_1^n \frac{x(3x+2)}{x}dx=\int_1^n (3x+2)dx=\left(3\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^n=\left(3\frac{n^2}{2}+2n\right)-\left(3\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)=$

$=3\frac{n^2}{2}+2n-\frac{7}{2}$

Se obţine ecuaţia

$3\frac{n^2}{2}+2n-\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$

$3n^2+4n-7=13$

$3n^2+4n-20=0$

$\Delta=16+240=256$

$n_1=\frac{-4-16}{6}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}\notin N$

$n_2=\frac{-4+16}{6}=\frac{12}{6}=2\in N$

In concluzie $n=2$.