Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x+1}=16$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,15\}$, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

Soluţii

Subiectul1

1. $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}=2\sqrt{7}+2-2\sqrt{7}=2\in N$.

2. $f(1)+f(2)+...+f(10)=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=$

$=(1+19)+(3+17)+(5+15)+(7+13)+(9+11)=20+20+20+20+20=100$.

3. $4^{x+1}=4^2\Rightarrow x+1=2\Rightarrow x=1$.

4. $P=\frac{numar-cazuri-favorabile}{numar-cazuri-posibile}$

In mulţimea A sunt 15 elemente deci sunt 15 cazuri posibile.
Multiplii lui 7 din mulţimea A sunt 7 şi 14 deci sunt două cazuri favorabile.

$P=\frac{2}{15}$.

5. Se adună vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ după regula triunghiului şi obţinem:

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}-\vec{j}=3\vec{i}+0\vec{j}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3$.

6. Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=\frac{1}{1}$

$3\sin x-2\cos x=\cos x$

$3\sin x=3\cos x$

$\sin x=\cos x$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul 2

1.a) $A(2)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$\det A(2)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+8+8-4-4-4=5.$$

b) $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 5 & 5 & 5\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=5\cdot A(1).$$

c) $\det A(x)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 1+x^3+x^3-x^2-x^2-x^2=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0$

Se observă că această ecuaţie are rădăcina $x=1$.

Cu ajutorul schemei lui Horner se obţine o descompunere in factori: $(x-1)(2x^2-x-1)=0$

Expresia din paranteză se descompune in factori cu formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$$\Rightarrow(x-1)\cdot 2\cdot(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow(x-1)^2(2x+1)=0$$

Rezultă $x=1$ sau $x=-\frac{1}{2}$.

2.a) $f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+3=1-2-2+3=0$.

b) Punem condiţia $f(2)=2$.

$f(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+m=m-4$

$m-4=2$

$m=6$

c) Din relaţiile lui Viete obţinem:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=2$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=-2$

$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-4$

$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right)=2\cdot\frac{-2}{-4}=1.$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.
5p	**c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^1 xf'(x)dx$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a) $f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\forall x\in(0,+\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$.

S-a folosit mai sus regula lui l'Hospital.

c) $f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}>0,\forall x\in(0,+\infty)$

de unde rezultă că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^2=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) Se foloseşte metoda integrării prin părţi pentru integrale definite:

$\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x'f(x)dx=f(1)-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}-arctgx\Big|_0^1=\frac{1}{2}-arctg1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

c) $V=\pi\int_0^1 h^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=$

$=\pi\left(\frac{3}{15}+\frac{10}{15}+\frac{15}{15}\right)=\frac{28\pi}{15}$.