Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, ştiind că $a,b\in\{2,3,4,5\}$ şi $a\neq b$.
5p	**5.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ şi $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.
5p	**6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ şi $\sin C=\frac{3}{5}$.

Soluţii

Subiectul1

1. Trei numere a,b,c sunt in progresie aritmetică dacă şi numai dacă $b=\frac{a+c}{2}$.

In cazul nostru avem:

$$2x+2=\frac{1+7}{2}$$

$$2x+2=4$$

$$x=1$$

2. Punctele de intersecţie dintre graficul unei funcţii şi axa Ox se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=0$.

$f(x)=0\Rightarrow x^2-4x+3=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=3$.

$G_f\cap Ox=\{A(1,0),B(3,0)\}$.

Distanţa dintre cele doua puncte este egală cu 2.

3. Se ridică la pătrat ambii membri:

$\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2=(x+2)^2\Rightarrow x^2+4=x^2+4x+4\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0$ care verifică ecuaţia dată in exerciţiu.

4. 23,43,53,25,35,45 deci se pot forma şase numere ca in enunţ.

5. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ se pot aduna după regula paralelogramului astfel: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}=3\cdot\overrightarrow{AO}$.

Diagonala AC a dreptunghiului se calculeaza cu teorema lui Pitagora şi este egală cu 10.

Rezultă $|\vec{v}|=|3\cdot\overrightarrow{AO}|=3|\overrightarrow{AO}|=3\cdot 5=15$.

6. Se foloseşte teorema sinusurilor:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ din care se păstrează primul rapot şi al treilea.

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{10}{\sin A}=\frac{6}{\frac{3}{5}}\Rightarrow\frac{10}{\sin A}=10\Rightarrow\sin A=1.$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

<u>Subiectul 2</u>

1.a) $A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$\det A(0)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0=2.$$

b) $A(a)^2=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+2&2a+1&2a+1\\2a+1&a^2+2&2a+1\\2a+1&2a+1&a^2+2\end{pmatrix}$.

$5A(a)-(A(a))^2=4I_3\Leftrightarrow$

$$5\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+2&2a+1&2a+1\\2a+1&a^2+2&2a+1\\2a+1&2a+1&a^2+2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}5a-a^2-2&4-2a&4-2a\\4-2a&5a-a^2-2&4-2a\\4-2a&4-2a&5a-a^2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}5a-a^2-2=4\\4-2a=0\end{cases}$$

$a=2$ verifică simultan cele două condiţii.

c) Din punctul b) obţinem că $5A(2)-(A(2))^2=4I_3$

Dăm factor comun $A(2)$ la stanga şi obţinem $A(2)(5I_3-A(2))=4I_3\Rightarrow A(2)\left[\frac{1}{4}(5I_3-A(2))\right]=I_3$

Analog obţinem că $\left(5I_3-A(2)\right)A(2)=4I_3 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}\left(5I_3-A(2)\right)\right]A(2)=I_3$

Rezultă că matricea $A(2)$ este inversabilă şi inversa ei este $A(2)^{-1}=\frac{1}{4}\left(5I_3-A(2)\right)$.

$$A(2)^{-1}=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

2.a) $f(2)=2^3-m\cdot 2^2+3\cdot 2-1=13-4m$

$f(-2)=(-2)^3-m(-2)^2+3(-2)-1=-15-4m$

$f(2)-f(-2)=13-4m+15+4m=28$

b) Restul impărţirii unui polinom f la $X-a$ este $r=f(a)$.

$f(2)=9 \Rightarrow 13-4m=9 \Rightarrow m=1$

Restul impărţirii polinomului f la $X+2$ este $r=f(-2)=-15-4\cdot 1=-19$.

Obs:Altfel $f(2)-f(-2)=28 \Rightarrow r=f(-2)=f(2)-28=9-28=-19$

c) Din relaţiile lui Viete avem:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{1}=m$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3$

Mai departe folosim formula $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$\Rightarrow m^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+6$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-6$

x_1,x_2,x_3 sunt rădăcini ale polinomului f deci avem:

$x_1^3-mx_1^2+3x_1-1=0$

$x_2^3-mx_2^2+3x_2-1=0$

$x_3^3-mx_3^2+3x_3-1=0$

Se adună membru cu membru cele trei egalităţi şi obţinem:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3(x_1+x_2+x_3)-3=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-m\left(m^2-6\right)+3m-3=0$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=m\left(m^2-6\right)-3m+3=m^3-9m+3$

$m^3-9m+3=3 \Rightarrow m^3-9m=0 \Rightarrow m\left(m^2-9\right)=0$

de unde rezultă $m=0$ sau $m=-3$ sau $m=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.
5p	**b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.
5p	**c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.
	2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_0.
5p	**b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.
5p	**c)** Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{-2}{(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\frac{-2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1},\forall x\in(-1,1)$

b) $x^2-1<0,\forall x\in(-1,1)$

$f'(x)=\frac{2}{x^2-1}<0,\forall x\in(-1,1)$ deci f este descrescătoare pe $(-1,1)$.

c) $f''(x)=\left(\frac{2}{x^2-1}\right)'=\frac{2'\cdot(x^2-1)-2\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2},\forall x\in(-1,1)$

Ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţia $x=0$.

x	-1 0 $+1$
$f''(x)$	+ + + + + + + 0 − − − −
$f(x)$	convexă concavă

Din tabel rezultă că $x=0$ este punct de inflexiune.

2.a) $I_0=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big|_1^2=e^2-e$.

b) $I_1=\int_1^2 xe^x dx=\int_1^2 x(e^x)'dx=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 x'e^x dx=2e^2-e-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-e^2+e=e^2$.

c)

$I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}e^x dx=\int_1^2 x^{n+1}(e^x)'dx=x^{n+1}e^x\Big|_1^2-\int_1^2(x^{n+1})'e^x dx=2^{n+1}e^2-e-(n+1)\int_1^2 x^n e^x dx=2^{n+1}e^2-e-(n+1)I_n$

$\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e,\forall n\in N$.