

Varianta 3

Subiectul I.

- a) $|(1-i)^4| = 4$
- b) Distanța căutată este $\sqrt{2}$
- c) Ecuația tangentei în P la hiperbolă este $x - y = 1$.
- d) Punctul C aparține cercului $\Leftrightarrow a = 2$.
- e) Aria căutată este $S_{ABC} = 2$.
- f) $a = -1, b = 0$.

Subiectul II.

- 1.
 - a) $x = 0$.
 - b) 0.
 - c) $(f \circ f)(1) = 0$.
 - d) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.
 - e) În \mathbf{Z}_8 avem: $\hat{0} + \hat{1} + \dots + \hat{7} = \hat{4}$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^1 f'(x) dx = \ln \frac{4}{3}$.
- c) Pentru $x \in [0, \infty)$, avem $f'(x) \geq 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$.
- e) Funcția f are un singur punct de extrem local și anume $x = 0$.

Subiectul III.

- a) Evident.
- b) Evident, $A, B \in M_3(\mathbf{N}) \Rightarrow A + B \in M_3(\mathbf{N})$, suma a două numere naturale fiind un număr natural.
- c) Evident, $A, B \in M_3(\mathbf{N}) \Rightarrow A \cdot B \in M_3(\mathbf{N})$,
- d) $\det(E) = 1$.
- e) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ are rangul 1, iar $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ are rangul 2.

f) $\det(E)=1 \neq 0$, deci E este o matrice inversabilă în $M_3(\mathbf{R})$.

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \cdot E^* = E^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \notin M, \text{ deoarece } -2 \notin \mathbf{N}.$$

g) Presupunem că X are o linie cu cel puțin două elemente nenule.

Fără a restrânge generalitatea, putem considera că prima linie a matricei X este

$$(a \quad b \quad c), \text{ cu } a, b \in \mathbf{N}^*. \text{ Notăm cu } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ prima coloană a matricei } X^{-1}.$$

Făcând efectiv înmulțirea, obținem $x \neq 0$ și $y \neq 0$, deci $ax + by + cz \geq 2$, contradicție cu $ax + by + cz = 1$.

Rezultă că fiecare linie a matricei X are exact un element nenul.

Analog obținem că și fiecare coloană a lui X conține un singur element nenul.

Așadar X are exact trei elemente nenule, situate pe linii și pe coloane diferite.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ aceste trei elemente. Atunci $\det(X) = \alpha\beta\gamma$ sau $\det(X) = -\alpha\beta\gamma$. și

deoarece $\det(X \cdot X^{-1}) = \det(X) \cdot \det(X^{-1}) = 1$, deducem că $\det(X) \in \{-1, 1\}$ și de aici

$\alpha = \beta = \gamma = 1$, de unde rezultă concluzia.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}, \quad x > 0.$

b) $f(a) = 0, \quad f'(a) = \ln a - 1.$

c) Alcătuiind tabelul de variație al funcției $u: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad u(x) = x - e \cdot \ln x$

se deduce că $x = e$ este punct de minim global pentru funcția u , de unde rezultă concluzia.

d) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x = a$ este punct de minim pentru funcția f .

Din teorema lui *Fermat* rezultă că $f'(a) = \ln a - 1 = 0$, deci $a = e$.

Reciproc, din punctul c) deducem că pentru $a = e$ avem $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, \infty)$.

În consecință, soluția este $a = e$.

e) Integrând pe intervalul $[1, 2]$ inegalitatea obținută la c), rezultă concluzia.

f) $e^x = x^e \Leftrightarrow x \cdot \ln e = e \cdot \ln x \Leftrightarrow u(x) = 0 \stackrel{c)}{\Leftrightarrow} x = e.$

g) Înlocuind în c) x cu fiecare din numerele b, c, d și folosind f), obținem $b = c = d = e$.