http://variante-mate.ro

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

Soluții

Subiectul1

1. $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$|2i|=|0+2i|=\sqrt{0^2+2^2}=2$.

2. Abscisele punctelor de intersecție a două grafice se obțin rezolvand ecuația $f(x)=g(x)$.

In cazul nostru avem:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+2x=-x-2\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$ care are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=-2$.

$f(-1)=-1\Rightarrow A(-1,-1)$

$f(-2)=0\Rightarrow B(-2,0)$

Punctele de intersecție sunt A și B.

3. $2^{x+1}\le 2^2\Leftrightarrow x+1\le 2\Leftrightarrow x\le 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]$.

4. Probabilitatea se calculeaza cu formula $P=\dfrac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile}$

Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este $C_5^3=\dfrac{5!}{3!(5-3)!}=10$ .Acestea sunt cazurile posibile.

Cazurile favorabile sunt $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,3,5\}$ și sunt in număr de patru.

Probabilitatea cerută este $P=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot a+(-2)\cdot(-1)=a+2$

$\Rightarrow a+2=3\Rightarrow a=1$

6. $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5}=-\dfrac{8}{40}=-\dfrac{1}{5}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p) \cdot X(q) \in G$, pentru orice $X(p), X(q) \in G$.

5p **b)** Admitem că $(G, \cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3 = I_2 + 7A$, unde $X(p) \in G$.

Subiectul 2

1.a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 4m+3+3-6-6-m = 3m-6$$

b) Sistemul are soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 3m-6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \Leftrightarrow m \in R \setminus \{2\}$

c) Pentru m=2 sistemul devine: $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

Rezolvăm sistemul.

$\det A = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0$ deci matricea sistemului are rangul 2.

Nu mai calculăm determinantul caracteristic deoarece sistemele omogene sunt compatibile intotdeauna.

Notăm $z = \alpha$ şi păstrăm primele două ecuaţii din sistem.

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-3\alpha \\ x+2y=-3\alpha \end{cases}$

Se rezolvă acest sistem şi se obţin soluţile $x = y = -\alpha$

Sistemul iniţial are soluţia: $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\alpha, \alpha \in R \\ z=\alpha \end{cases}$

Inlocuim in condiţia din ipoteză şi obţinem $(-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 3 \Rightarrow 3\alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \pm 1$.

Pentru $\alpha = -1$ obţinem $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = -1 \end{cases}$ care convine.

Pentru $\alpha = 1$ obţinem $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 1 \end{cases}$ care nu convine deoarece in exerciţiu era condiţia $x_0 > 0$.

2.a) Mai intai să observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$

Fie $X(p)$ şi $X(q)$ două matrice oarecare din G.

$X(p) \cdot X(q) = (I_2 + pA)(I_2 + qA) = I_2^2 + qI_2A + pAI_2 + pqA^2 = I_2 + qA + pA + pqA = I_2 + (p + q + pq)A$

Să mai observăm că in ipoteza $p, q \neq -1$ rezultă $(p+1)(q+1) \neq 0 \Rightarrow p + q + pq \neq -1$

In concluzie $X(p) \cdot X(q) \in G$.

b) Fie $X(p')$ inversul elementului $X(p)$ in grupul $(G, \cdot)$.

$X(p) \cdot X(p') = X(p') \cdot X(p) = X(0)$

$\Rightarrow X(p + p' + pp') = X(0) \Rightarrow p + p' + pp' = 0 \Rightarrow p'(1+p) = -p \Rightarrow p' = -\dfrac{p}{1+p} \neq -1$

Rezultă că pentru orice matrice $X(p) \in G$ există matricea $X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right) \in G$ astfel incat

$X(p) \cdot X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right) = X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right) \cdot X(p) = X(0)$

deci $X\left(-\dfrac{p}{1+p}\right)$ este inversul elementului $X(p)$ in grupul $(G, \cdot)$

c) Folosim relaţia $X(p) \cdot X(q) = X((p+1)(q+1) - 1)$

$X(p)^2 = X(p) \cdot X(p) = X((p+1)(p+1) - 1) = X((p+1)^2 - 1)$

$X(p)^3 = X(p)^2 \cdot X(p) = X((p+1)^2 - 1) \cdot X(p) = X((p+1)^2(p+1) - 1) = X((p+1)^3 - 1)$

Mai departe avem:

$X((p+1)^3 - 1) = X(7) \Rightarrow (p+1)^3 - 1 = 7 \Rightarrow (p+1)^3 = 8$

$p \in R \setminus \{-1\} \Rightarrow p + 1 = 2 \Rightarrow p = 1$. Soluţia este $X(1)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $f(x) = a$ are trei soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1} dx$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_x^{2x} f(t)\, dt}{x}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

Tabelul cu montonia funcţiei f este:

x		-2		2	
f'(x)	+ + + +	0	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + +
f(x)	↗	f(-2)	↘	f(2)	↗

Din tabel rezultă că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

b)Se aplică in mod repetat regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-12x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^3-12x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-12}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(3x^2-12\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

c) Fie funcţia $g:R\to R$ prin formula $g(x)=f(x)-a$.

$g'(x)=f'(x)=3x^2-12$ iar ecuaţia $g'(x)=0$ are aceleaşi rădăcini $x=\pm 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g(-2)=f(-2)-a=-8+24-a=16-a$

$g(2)=f(2)-a=8-24-a=-16-a$

Şirul lui Rolle pentru funcţia g este $-\infty \quad 16-a \quad -16-a \quad +\infty$

Ecuaţia $g(x)=0$ are trei soluţii distincte d.n.d. in şirul lui Rolle sunt trei schimbări de semn.

$$\Rightarrow\begin{cases}16-a>0\\-16-a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<16\\a>-16\end{cases}\Rightarrow a\in(-16,16)$$

2.a). Fie F o primitivă oarecare a funcţiei f.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}>0$ pentru $x>-1$ rezultă că F este strict crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

b) $$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{\frac{2x+3}{x+2}}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+3x+2\right)'}{x^2+3x+2}dx=$$

$$=\ln\left|x^2+3x+2\right|\Big|_0^1=\ln 6-\ln 2=\ln 3$$

c) $$\int_x^{2x}f(t)dt=\int_x^{2x}\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_x^{2x}\frac{2t+4-1}{t+2}dt=\int_x^{2x}\left[2-\frac{1}{t+2}\right]dt=\left(2t-\ln(t+2)\right)\Big|_x^{2x}=$$

$$=\left(4x-\ln(2x+2)\right)-\left(2x-\ln(x+2)\right)=2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}$$ pentru x>0.

Limita cerută este:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}\right)=2-\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+2}{x+2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=2-\frac{\ln 2}{+\infty}=2-0=2$$

Am ţinut aici cont de faptul că $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+2}{x+2}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{x+2}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+2)'}{(x+2)'}=\ln 2$

http://variante-mate.ro

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x^2+mx+4=0$ are soluția $x=2 \Rightarrow m=-4$ Pentru $m=-4$ cele două mulțimi sunt egale	**3p** **2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$ $\Delta=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
3.	Condiție: $x>0$ $3^{\log_3 x}<3^0 \Leftrightarrow x<1$ $x\in(0,1)$	**2p** **2p** **1p**
4.	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere $\Rightarrow$ 25 de cazuri favorabile $\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ și $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p=\frac{5}{18}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$ $a^2-6a+9=0$ $a=3$	**2p** **2p** **1p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\det(A(\pi))=1$	**3p** **2p**

http://variante-mate.ro

b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\ 0 & 1 & 0\\ i(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**3p**
	$A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$	**2p**
	$A(2012x)=I_3 \Leftrightarrow \cos(2012x)=1$ și $\sin(2012x)=0$	**1p**
	$x=\frac{k\pi}{1006}, k\in\mathbb{Z}$	**2p**
2.a)	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$x\circ x'=\frac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\frac{x'x}{2x'x-x'-x+1}=x'\circ x$, pentru orice $x,x'\in G$	**1p**
	$x\circ x'=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x$	**3p**
	$x'\in(0,1)$	**1p**
c)	f este bijectivă	**2p**
	$f(x\circ y)=\frac{1}{x\circ y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice x real, deci f este convexă	**2p**
c)	$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$	**2p**
	$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}$	**2p**
	$g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**1p**

http://variante-mate.ro

2.a)	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$	**1p**
	$J_1 = -\cos t \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}$	**2p**
	$J_1 = 1$	**2p**
b)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$	**1p**
	$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\Big\|_0^1$	**3p**
	$I_1 = \frac{1}{3}$	**1p**
c)	$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx$	**2p**
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x = t$ obținem $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt = I_{2n}$	**3p**

http://variante-mate.ro