Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1=3+i$ și $z_2=3-i$. Arătați că numărul z_1z_2 este real.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+2x-4}=x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,...,80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\cos\frac{x}{2}+\sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $A(1)+A(3)=aA(2)$.
5p	**c)** Arătați că $A(x)A(y)=2A(x+y)+xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy+6x+6y+10$.
5p	**a)** Arătați că $2*(-2)=-2$.
5p	**b)** Arătați că $x*y=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(x^2+1)f(x)dx=0$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}+\ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real m, $m>0$, ştiind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=m$, are aria egală cu $\ln 2$.