Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.