

Bacalaureat 2002

Profil: real (matematica-fizica, informatica)

Subiectul I (30 p)

1. Se considera functia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = x^2 + 2x$
 - a) (4p) Sa se verifice ca $f(x) = (x+1)^2 - 1, \forall x \in \mathbb{C}$
 - b) (4p) Sa se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuatia $(f \circ f)(x) = 0$
 - c) (2p) Utilizand metoda inductiei matematice, sa se arate ca
$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ ori}}(x) = (x+1)^{2^n} - 1, \forall x \in \mathbb{C}.$$
2. Se considera functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1).$
 - a) (4p) Sa se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$
 - b) (3p) Sa se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$
 - c) (3p) Sa se calculeze $\int_0^1 f(x) dx.$
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(n, -n), \forall n \in \mathbb{N}.$
 - a) (3p) Sa se scrie ecuatia dreptei $A_0A_1.$
 - b) (4p) Sa se arate ca lungimea segmentului A_nA_{n+1} nu depinde de $n, \forall n \in \mathbb{N}.$
 - c) (3p) Sa se arate ca punctul A_n se afla pe dreapta $A_0A_1, \forall n \in \mathbb{N}.$

Subiectul II (20 p)

1. Se considera sistemul:
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$
, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$ Notam cu A matricea sistemului.
 - a) (5p) Sa se calculeze determinantul si rangul matricei $A.$
 - b) (3p) Sa se rezolve sistemul.
 - c) (2p) Sa se gaseasca o solutie (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8.$

2. Se considera sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Admitem

cunoscut ca $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{p^2}{6}$ si consideram sirurile $(b_n)_{n \geq 1}$ si $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$b_n = a_n + \frac{1}{n}, c_n = a_n + \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) (3p) Sa se arate ca sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescator.

b) (3p) Sa se arate ca sirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este strict crescator.

c) (2p) Sa se arate ca $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{p^2}{6}$.

d) (2p) Sa se arate ca $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{p^2}{6} \right) = -1$.

Subiectul III (20 p)

Pentru orice numar natural nenul n , se considera multimea de numere rationale $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) (4p) Sa se arate ca, daca $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.

b) (4p) Sa se verifice ca, daca $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.

c) (4p) Sa se arate ca, daca $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

d) (2p) Sa se arate ca pentru orice numar rational r , exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $r \in H_n$.

e) (4p) Sa se arate ca daca $(G, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ si $\frac{1}{n!} \in G, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

f) (2p) Sa se demonstreze ca, daca $G_1, \dots, G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ si $\mathbb{Q} = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{2002}$, atunci exista $i \in \{1, 2, \dots, 2002\}$ astfel incat $G_i = \mathbb{Q}$.

Subiectul IV (20 p)

Se considera numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ si functiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$$

$$F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - \dots - \frac{a_n}{n} \cos nx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) (4p) Sa se arate ca functia F este o primitiva a functiei f pe $\mathbb{R}$.

b) (4p) Sa se verifice ca $F(x + 2kp) = F(x), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) (2p) Utilizand rezultatul: "Daca o functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodica si monotona atunci este constanta", sa se arate ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci functia F este constanta.

d) (4p) Sa se arate ca daca functia F este constanta, atunci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

e) (4p) Notam cu $S(p, q) = \int_0^{2p} \sin px \sin qx \, dx, \forall p, q \in \mathbb{N}^*$. Utilizand formula

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b), \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ sa se arate ca:}$$

$$S(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{daca } p \neq q \\ p, & \text{daca } p = q \end{cases}, \forall p, q \in \mathbb{N}^*$$

f) (4p) Sa se demonstreze ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.