

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 050

- 5p 1. Fie fracția zecimală periodică $0,(769230) = 0,a_1a_2a_3\dots$. Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2008}$.
- 5p 2. Să se arate că dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\log_2 x + \log_4 x^2 = 6$.
- 5p 4. Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
- 5p 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
- 5p 6. Știind că $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și că $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 088

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu X^t transpusa unei matrice pătratice X și cu $\operatorname{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X .
- 5p a) Să se demonstreze că $\operatorname{Tr}(A + A^t) = 2\operatorname{Tr}(A)$.
- 5p b) Să se demonstreze că dacă $\operatorname{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = O_2$.
- 5p c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.
2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- 5p a) Să se arate că $A^2 \in K$.
- 5p b) Să se arate că mulțimea K este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
- 5p c) Să se arate că pentru orice $X \in K, X \neq O_2$ există $Y \in K$ astfel încât $XY = I_2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 076

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.
- 5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.
- 5p b) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$.
2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.
- 5p a) Să se calculeze I_1 .
- 5p b) Să se arate că $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.