

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și $a_3 = 8$.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x = \log_3(4 - x)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
- 5p 6. Arătați că $4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(-1))$.
- 5p b) Verificați dacă $A(0) \cdot A(1) = 5A(1)$.
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.
2. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.
- 5p a) Verificați dacă $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2012 \circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{f(x)}$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
- 5p a) Arătați că $I_1 = \frac{e-2}{e}$.
- 5p b) Verificați dacă $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Arătați că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .