**Examenul de bacalaureat național 2017**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Clasa a XII-a**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$. |
| **5p** | **2.** Se consideră $x_1$ și $x_2$ soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real $m$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$. |
| **5p** | **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare. |
| **5p** | **5.** Se consideră triunghiul $ABC$ și punctele $M$, $N$ și $P$, mijloacele laturilor $AB$, $BC$, respectiv $AC$. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$. |
| **5p** | **6.** Determinați numerele reale $x$, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real $a$. |
| **5p** | **b)** Determinați numerele reale $m$ pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$. |
| **5p** | **c)** Determinați numerele întregi $a$ pentru care sistemul are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)$, iar $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt numere întregi. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$. |
| **5p** | **b)** Determinați numerele naturale $n$, știind că $(n*n)*n=n$. |
| **5p** | **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. |
| **5p** | **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{2x}=\frac{1}{e^2}$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că pentru orice număr real $a$, $a\in(-\sqrt{2},-1)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte. |

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

**5p** **b)** Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**5p** **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural $n$, $n\ge 2$.