Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(x^2+3x+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}dx$. Demonstrați că $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.