

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică  $M\_mate-info$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  cu  $b_2 = 2$  și  $b_4 = 4$ . Determinați  $b_6$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care vârful parabolei asociate funcției  $f$  este situat pe dreapta  $y = 3x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ .
- 5p 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p 5. Segmentele  $AB$  și  $A'B'$  au același mijloc. Demonstrați că  $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$ .
- 5p 6. Demonstrați că, în orice triunghi  $ABC$ , are loc relația  $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea  $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(X(0,1)) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte  $a$  și  $b$ , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Demonstrați că, dacă  $(x_0, y_0, z_0)$  este soluție a sistemului de ecuații, atunci  $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$ , pentru orice număr real  $a$ .
2. Pe mulțimea  $M = (2, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $5 * 10 = 17$ .
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Determinați  $x \in M$  pentru care  $x * x * x = x * x$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ , este paralelă cu dreapta de ecuație  $x - \sqrt{3}y = 0$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 \left( 2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$ .
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este strict crescătoare.

- 5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ , cu  $a < b$ ,  $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$ , pentru orice primitivă  $F$  a funcției  $f$ .

<https://variante-mate.ro>