Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+2i$. Arătați că $z+\frac{13}{z}=6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x$. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5}=9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Se consideră A, o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A, aceasta să aibă un număr impar de elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinaţi ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$ și $B=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*2021=2021$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=14$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e (2x+3-f(x))\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x^3+1)\,dx = \frac{4(2-\ln 2)}{3}$.