Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\overline{z} = 3 + i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului z. Calculați modulul numărului $\dfrac{z+2i}{z}$.

5p **2.** Determinați valorile parametrului real m, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+1)x + 9$ să verifice condiția $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 - \sqrt{x+1} = x$.

5p **4.** Aflați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,2,4,6\}$.

5p **5.** Scrieți ecuația înălțimii din B a triunghiului ABC care are vârfurile $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(4,2)$.

5p **6.** Calculați $E(x) = \cos(x+30^\circ)\cdot\cos(60^\circ - x) + \sin(x-60^\circ)\cdot\sin(x+30^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele: $A(a) = \begin{pmatrix} a & -a & -a \\ -a & a & -a \\ -a & -a & a \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1)) + \det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Aflați $a \in \mathbb{R}$ știind că $(A(a))^2 - A(a) - 2I_3 = O_3$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\det(A(-1) + xI_3) = 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că $N = \sqrt[3]{-2023} * \sqrt[3]{-2022} * \sqrt[3]{-2021} * \ldots * \sqrt[3]{2021} * \sqrt[3]{2022} * \sqrt[3]{2023}$ este număr natural.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, arătați că funcția $f:(0,+\infty) \to G$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ este un izomorfism de la grupul $((0,+\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $G = (3,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^4+x^2+1}\geq\dfrac{2-x-x^2}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+\ln(1+x))dx=\dfrac{5}{12}$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx\geq 0$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 (\ln(1+x)-x)dx\leq-\dfrac{1}{12}$.