

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_{st-nat}*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_{2023} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 1002$ iar rația este $\frac{1}{2}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$. Calculați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}\}$, acesta să **nu** fie număr natural.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$ și $C(-2; 5)$. Determinați ecuația medianeî duse din A a triunghiului ABC .
- 5p 6. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $M(m) \cdot M(n) = M(6)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$, oricare ar fi numerele reale x și y .
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \leq 5$.
- 5p c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2023^n$, oricare ar fi n număr natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, pentru orice x număr real.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice x număr real.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p a) Calculați $\int \frac{f(x)}{x^2} dx$.
- 5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(\frac{1}{e}, +\infty)$.
- 5p c) Fie $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{x})$. Determinați primitiva G a funcției g cu proprietatea că $G(e) = \frac{e^2}{4}$.