Relațiile lui Viete pentru ecuația de gradul doi

Forma generală a ecuației de gradul doi este $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$
Se calculează discriminantul $\Delta = b^2-4ac$

Cazul 1
Dacă $\Delta>0$ atunci ecuația de gradul doi are două rădăcini reale diferite date de formula

$$x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Cazul 2
Dacă $\Delta=0$ atunci ecuația de gradul doi are două rădăcini reale egale date de formula

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Cazul 3
Dacă $\Delta<0$ atunci ecuația de gradul doi nu are rădăcini reale.
Relațiile lui Viete sunt:

$$\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

În exerciții mai sunt folositoare următoarele formule:

$$x_1^2+x_2^2 = S^2-2P$$
$$x_1^3+x_2^3 = S^3-3SP$$

Exerciții
Ex. 1. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-5x+2=0$ să se calculeze x_1+x_2, x_1x_2, $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$ și $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.
Rezolvare:

$a=1$

$b=-5$

$c=2$

$$\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-5}{1} = 5 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2 = S^2-2P = 5^2-2\cdot 2 = 25-4 = 21$$
$$x_1^3+x_2^3 = S^3-3SP = 5^3-3\cdot 5\cdot 2 = 125-30 = 95$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P} = \frac{5}{2}$$

Ex. 2. Determinați numărul $m\in\mathbb{R}$ pentru care soluțiile ecuației $x^2-2mx+m+1=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2 = x_1x_2$
Rezolvare:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{1} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} = m+1 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow 2m = m+1$ de unde obținem $m = 1$.

Ex. 3. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 4 = 0$ să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$

Rezolvare:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4 \end{cases}$$

$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = S^2 - 2P + P = S^2 - P = 5$

Ex. 4. Se consideră ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Determinați m pentru care ecuația admite ca soluții două numere reale opuse.

Rezolvare:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m$

Punem condiția $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ și obținem $m = 0$.