Teorema lui Rolle (Michel Rolle 1652-1719)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție. Dacă:

a) funcția f este continuă pe intervalul închis $[a,b]$;

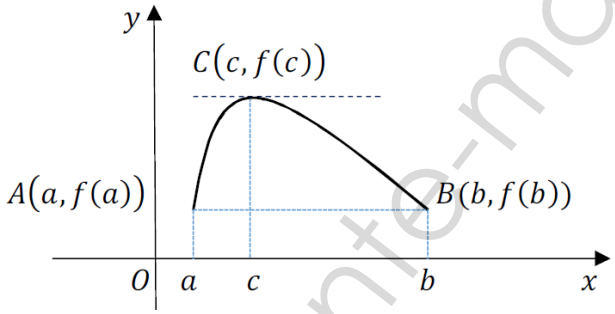
b) funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a,b);

c) $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Teorema lui Rolle are o interpretare geometrică simplă. Din $f'(c)=0$ rezultă că tangenta la graficul funcției f în punctul $C(c,f(c))$ este paralelă cu axa Ox. Deci dacă cerințele teoremei lui Rolle sunt îndeplinite, atunci pe graficul funcției f există (cel puțin) un punct în care tangenta este paralelă cu axa Ox.



Obs: Soluțiile reale ale ecuației $f(x)=0$ se numesc zerourile funcției f

Soluțiile reale ale ecuației $f'(x)=0$ se numesc zerourile derivatei.

Consecința 1

Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zero al derivatei.

Consecința 2

Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcţii derivabile pe un interval se află cel mult un zero al funcţiei.

Exerciții rezolvate

Ex. 1 Să se determine numerele reale a,b,c pentru care se poate aplica teorema lui Rolle funcției următoare și să se aplice aceasta dacă:

$f:[-3,3]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-7x+b-3 & ,x\in[-3,0) \\ x^2+(c+1)x+1 & ,x\in[0,3] \end{cases}$$

Rezolvare:

Funcția f trebuie să fie continuă pe intervalul $[-3,3]$.

Punem condiția de continuitate în punctul $x=0$.

https://variante-mate.ro

$$l_s = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(ax^2 - 7x + b - 3\right) = b - 3$$

$$l_d = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^2 + (c+1)x + 1\right) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$b - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 4}$$

Funcția f trebuie să fie derivabilă pe intervalul $(-3,3)$.

Punem condiția de derivabilitate în punctul $x = 0$.

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{ax^2 - 7x + b - 3 - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{ax^2 - 7x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (ax - 7) = -7$$

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2 + (c+1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2 + (c+1)x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x + c + 1) = c + 1$$

Rezultă $c + 1 = -7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -8}$

A treia condiție din teorema lui Rolle impune $f(-3) = f(3)$

$$\left.\begin{array}{l} f(-3) = 9a + 22 \\ f(3) = 9 - 21 + 1 = -11 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a + 22 = -11 \text{ de unde obținem } \boxed{a = -\frac{11}{3}}.$$

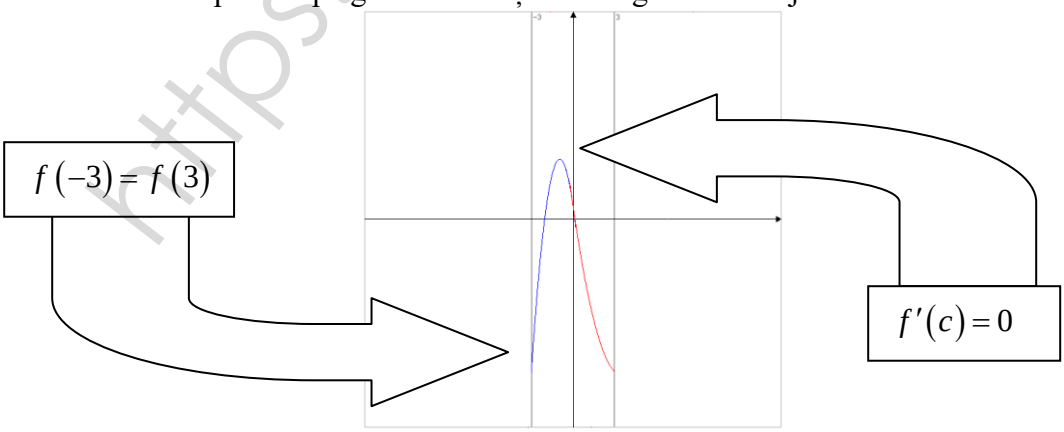
Exercițiul cere și să se aplice teorema lui Rolle adica trebuie găsit acel punct $c \in (-3,3)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{22}{3}x - 7 & , x \in [-3,0) \\ 2x - 7 & , x \in [0,3] \end{cases}$$

$$-\frac{22}{3}x - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{21}{22} \in (-3,0]}$$

$$2x - 7 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{7}{2} \notin [0,3)$$

Calculele de mai sus se pot citi pe graficul funcției din figura de mai jos.



https://variante-mate.ro

Ex. 2 Fie funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ derivabilă și astfel încât $f(1)=2f(2)$, Să se arate că există $c\in(1,2)$ astfel încât $f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$.

Rezolvare:

Considerăm funcția ajutătoare $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

Functia g este continuă pe intervalul închis $[1,2]$ și derivabilă pe intervalul deschis $(1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=f(1) \\ g(2)=2f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow g(1)=g(2)$$

Conform teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct $c\in(1,2)$ asrfel încăt $g'(c)=0$.

$$g'(x)=\left(xf(x)\right)'=x'f(x)+xf'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$g'(c)=f(c)+cf'(c)=0$$

$$\Rightarrow f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$$

https://variante-mate.ro