

**Olimpiada Națională de Matematică**

**Etapa Județeană și a Municipiului București, 13 Martie 2010**

**CLASA A VII-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Problema 1.**

- (i) Descompuneți în factori expresia  $xy - x - y + 1$ .  
(ii) Demonstrați că dacă numerele întregi  $a$  și  $b$  verifică  $|a + b| > |1 + ab|$ , atunci  $ab = 0$ .

**Soluție.**

- (i) Se verifică prin calcul că  $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$ . **1 punct**  
(ii) Ambii membri ai inegalității sunt pozitivi, deci prin ridicare la pătrat se obține inegalitatea echivalentă  $a^2 + b^2 + 2ab > 1 + 2ab + a^2b^2$   
..... **2 puncte**  
De aici rezultă  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) < 0$ .  
..... **2 puncte**  
Presupunând prin absurd că  $ab \neq 0$ , rezultă  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ . Cum  $a$  și  $b$  sunt numere întregi, rezultă că  $a^2 - 1 \geq 0$  și  $b^2 - 1 \geq 0$ .  
..... **1 punct**  
Atunci  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$ , contradicție.  
..... **1 punct**

**Problema 2.** Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$ . Determinați restul împărțirii numărului  $n(n + 1)(n + 2)$  la  $n - 1$ .

*Gazeta Matematică*

- Soluție.** Avem  $n(n + 1)(n + 2) = (n - 1 + 1)(n - 1 + 2)(n - 1 + 3) = (n - 1)^3 + 6(n - 1)^2 + 11(n - 1) + 6$ .  
..... **3 puncte**  
Dacă  $n - 1 > 6$ , restul este 6.  
..... **1 punct**  
Dacă  $n = 2, 3, 4, 7$ , restul este 0.  
..... **1 punct**  
Dacă  $n = 5$ , restul este 2.  
..... **1 punct**  
Dacă  $n = 6$ , restul este 1.  
..... **1 punct**

**Problema 3.** Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = AC$  și  $\angle BAC = 40^\circ$ . Punctele  $S$  și  $T$  se află pe laturile  $AB$ , respectiv  $BC$ , astfel încât

$\angle BAT = \angle BCS = 10^\circ$ . Dreptele  $AT$  și  $CS$  se intersectează în punctul  $P$ .  
 Demonstrați că  $BT = 2PT$ .

**Soluție.** Triunghiul  $ABC$  este isoscel, deci  $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$ .  
 Avem  $\angle TAC = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$  și  $\angle ACS = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ , deci  $\angle APC = 90^\circ$ .

..... **2 puncte**  
 Triunghiurile  $ABT$  și  $BSC$  sunt asemenea (UU), de unde  $\frac{BS}{BC} = \frac{BT}{AB}$ .

..... **1 punct**  
 Având unghiul  $B$  comun, triunghiurile  $BST$  și  $BCA$  sunt asemenea (LUL), deci  $TB = TS$  și  $\angle TSB = 70^\circ$ .

..... **2 puncte**  
 Deoarece  $\angle CSA = \angle SBC + \angle SCB = 70^\circ + 10^\circ = 80^\circ$ , rezultă că  
 $\angle PST = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$ .

..... **1 punct**  
 Triunghiul  $STP$  este dreptunghic în  $P$  și  $\angle PST = 30^\circ$ , deci  $BT = 2PT$ .

..... **1 punct**

**Problema 4.** Considerăm patrulaterul  $ABCD$  cu  $AD = DC = CB$  și  $AB \parallel CD$ . Punctele  $E$  și  $F$  aparțin segmentelor  $CD$  și  $BC$  astfel încât  $\angle ADE = \angle AEF$ . Demonstrați că

(i)  $4CF \leq CB$ .

(ii) Dacă  $4CF = CB$ , atunci  $AE$  este bisectoarea unghiului  $\angle DAF$ .

**Soluție.**

(i) Avem  $\angle FEC = 180^\circ - \angle AEF - \angle DEA = 180^\circ - \angle ADE - \angle DEA = \angle DAE$ . ..... **1 punct**

Din  $AD = DC = CB$  și  $AB \parallel CD$  rezultă  $\angle ADC = \angle DCB$ , deci triunghiurile  $ADE$  și  $ECF$  sunt asemenea (UU). Obținem

$$\frac{AD}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{CF} \tag{1}$$

..... **2 puncte**  
 De aici  $AD \cdot CF = EC \cdot DE \leq \frac{1}{4}(EC + DE)^2 = \frac{1}{4}CD^2$ , deci  $4CF \leq CB$ ,  
 în baza egalităților  $AD = DC = CB$ .

..... **1 punct**

(ii) Dacă  $4CF = CB$ , atunci în inegalitatea  $EC \cdot DE \leq \frac{1}{4}(EC + DE)^2$  avem egalitate, adică  $CE = ED$ .

..... **1 punct**

Relația (1) devine  $\frac{AD}{DE} = \frac{AE}{EF}$ . Cum  $\angle ADE = \angle AEF$ , rezultă că  
 triunghiurile  $ADE$  și  $AEF$  sunt asemenea (LUL).

..... **1 punct**

Atunci  $\angle DAE = \angle EAF$ , adică  $AE$  este bisectoarea unghiului  $\angle DAF$ .

..... **1 punct**