Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a VIII-a

Problema 1.

(i) Arătaţi că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.

(ii) Arătaţi că putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie x, y două numere naturale nenule diferite. Arătaţi că numărul $\dfrac{(x+y)^2}{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}$ nu este întreg.

Problema 3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Bisectoarele unghiurilor $\angle A'C'A$ şi $\angle A'AC'$ intersectează AA' şi $A'C'$ în punctele P, respectiv S. Punctul M este piciorul perpendicularei din A' pe $C'P$ iar N este piciorul perpendicularei din A' pe AS. Punctul O este centrul feţei $ABB'A'$.

(i) Demonstraţi că planele (MNO) şi $(AC'B)$ sunt paralele.

(ii) Calculaţi distanţa dintre planele (MNO) şi $(AC'B)$ ştiind că $AB = 1$.

Problema 4. Determinaţi perechile de numerele naturale (a, b) care verifică egalitatea $a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2 + |2a + 1 - 2b|}$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.