

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR  
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

VARIANTA 2

Profesori

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	a) Verificarea pentru $n = 1$ Justificarea faptului că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ , $k \geq 1$	1p 4p
	b) $1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 = \frac{7(7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{6} = 140$ $a_7 = 0$	3p 2p
	c) Cum $(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+20)^2 = 20n^2 + 20 \cdot 21n + \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} =$ $= 10(2n^2 + 42n + 287)$ se divide cu 10, rezultă că $a_{n+20} = a_n$ , $\forall n \geq 1$	2p 1p
	d) $2011^{2011} \equiv 11 \pmod{20}$ $a_m = a_{11} = 6$	1p 1p
2.	a) $AA'$ , $BB'$ , $CC'$ sunt bisectoarele interioare ale triunghiului $ABC$ , deci dreptele sunt concurente	4p 1p
	b) $\sphericalangle BIA' = \frac{1}{2}(\widehat{AB'} + \widehat{A'B}) =$ $= \frac{1}{2}(\widehat{B'C} + \widehat{CA'}) = \sphericalangle IBA'$ , deci triunghiul $BIA'$ este isoscel	2p 2p 1p
	c) $\sphericalangle(AA', B'C') = \frac{1}{2}(\widehat{C'A} + \widehat{A'B'}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ Finalizare	2p 1p
	d) $IA' = BA' = 2R \sin \frac{A}{2}$ și $IA = \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2}$ $AI = IA' \Leftrightarrow \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2} = 2R \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{p} = 2R \sin^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow r = R(1 - \cos A)$	1p 1p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.	a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} =$ $= 1 + \sqrt{5} \in M$	3p 2p
	b) Fie $x = a + b\sqrt{5}$ și $y = c + d\sqrt{5}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $x + y - xy = a + b\sqrt{5} + c + d\sqrt{5} - (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} =$ $= a + c - ac - 5bd + (b + d - ad - bc)\sqrt{5}$ Cum $a + c - ac - 5bd \in \mathbb{Z}$ și $b + d - ad - bc \in \mathbb{Z}$ , rezultă că $x + y - xy \in M$	2p 2p 1p

	<p>c) Fie <math>x = a + b\sqrt{5}</math> cu <math> a^2 - 5b^2  = 1</math>. Dacă <math>a^2 - 5b^2 = 1 \Rightarrow x(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 1</math>, deci <math>\frac{1}{x} \in M</math>, iar dacă <math>a^2 - 5b^2 = -1 \Rightarrow x(-a + b\sqrt{5}) = -a^2 + 5b^2 = 1</math>, deci <math>\frac{1}{x} \in M</math></p> <p>Reciproc, fie <math>x = a + b\sqrt{5} \in M</math>, <math>x \neq 0</math>. Cum <math>\frac{1}{x} = \frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5} \in M</math>,</p> <p>rezultă că <math>a^2 - 5b^2   a</math> și <math>a^2 - 5b^2   b</math>, deci <math>(a^2 - 5b^2)^2   a^2</math> și <math>(a^2 - 5b^2)^2   b^2</math>, de unde <math>(a^2 - 5b^2)^2   a^2 - 5b^2</math>. Obținem <math>a^2 - 5b^2   1</math>, deci <math> a^2 - 5b^2  = 1</math></p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>d) Fie <math>x_0 = 9 + 4\sqrt{5}</math>. Cum <math>\frac{1}{x_0} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} = 9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{x_0} \in M</math></p> <p><math>x \cdot y \in M</math>, <math>\forall x, y \in M \Rightarrow x_0^n \in M</math> și <math>\frac{1}{x_0^n} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^n \in M</math>, <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>. Cum <math>x_0^n &lt; x_0^{n+1}</math>, <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>, rezultă concluzia</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
2.	<p>a) Dacă <math>F</math> este o primitivă a lui <math>f</math>, atunci <math>F'(x) = f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}</math></p> <p>Cum <math>\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow F'(x) \geq \frac{1}{4} &gt; 0</math>, <math>\forall x \in \mathbb{R}</math>, deci <math>F</math> este strict crescătoare pe <math>\mathbb{R}</math></p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>b) <math>\int \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx = -\int (\ln(3 + \cos x))' dx =</math> <math>= -\ln(3 + \cos x) + C</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) Fie <math>x_n = 2n\pi</math> și <math>y_n = (2n+1)\pi</math>, <math>n \in \mathbb{N}^*</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty</math>, <math>\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty</math>,</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}</math>, <math>\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}</math> și cum <math>\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}</math>, rezultă concluzia</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>d) Deoarece <math>f</math> este continuă, pară și periodică de perioadă <math>2\pi</math>, avem</p> $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{\pi - \varepsilon} f(x) dx.$ <p>Cu substituția <math>t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}</math>, <math>x \in [0, \pi - \varepsilon]</math>, <math>\varepsilon &gt; 0</math>, rezultă</p> $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big _0^{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}} = \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$	<p>1p</p> <p>1p</p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- câte 1 punct pentru precizarea fiecăruia dintre cele patru elemente cerute **4x1p=4 puncte**  
[Punctajul se acordă doar în situația în care candidatul a corelat elementele cerute cu conținutul testului proiectat pentru evaluarea sumativă la finalul anului școlar.]
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă metodico-științifică, adecvată evaluării sumative la finalul anului școlar, a fiecăruia dintre cei șase itemi construiți **6x2p=12 puncte**
- calitatea structurării testului **2 puncte**
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă a baremului de evaluare și de notare a fiecăruia dintre cei șase itemi construiți **6x2p=12 puncte**